

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

16. Band, Heft 4

26. Juli 1937

S. 145—192

Geschichtliches.

● **Tropfke, Johannes:** Geschichte der Elementarmathematik in systematischer Darstellung mit besonderer Berücksichtigung der Fachwörter. Bd. 3. Proportionen, Gleichungen. 3., verb. Aufl. Berlin: Walter de Gruyter 1937. 293 S. RM. 11.—.

Neugebauer, O.: Über babylonische Mathematik. *Scientia* **61**, 151—157 (1937).

Neugebauer, O.: Die Überlieferung von babylonischen mathematischen Methoden durch griechische Schriften. *Mat. Tidsskr. B* **1937**, 17—21 [Dänisch].

Bortolotti, Ettore: I problemi del secondo grado nella matematica babilonese. *Period. Mat.*, IV. s. **16**, 129—143 u. 225—241 (1936).

Schrecker, Paul: Arnauld, Malebranche, Prestet et la théorie des nombres négatifs (d'après une correspondance retrouvée). *Thalès. Rec. Ann. Trav. Inst. Hist. Sci. et Techn.*, Univ. Paris **2**, 82—90 (1935).

Wiederabdruck mit erläuternden Bemerkungen eines in einem 1689 erschienenen Werke von Prestet veröffentlichten Briefwechsels zwischen Arnauld und Prestet, der von Malebranche inspiriert ist. Es werden darin die dem Begriff der negativen Zahlen innewohnenden Erkenntnisschwierigkeiten mehr philosophisch als mathematisch erörtert.

Bessel-Hagen (Bonn).

Loria, Gino: Descartes géomètre. *Rev. Métaphys. et Morale* **49**, 199—220 (1937).

Lebesgue, Henri: Sur une construction du polygone régulier de 17 côtés, due à André-Marie Ampère, d'après des documents conservés dans les archives de l'Académie des sciences. *C. R. Acad. Sci.*, Paris **204**, 925—928 (1937).

Quelques mois avant sa mort Ampère fit une communication à l'Académie concernant la construction du polygone régulier de 17 côtés. Cette construction suit la marche indiquée par Gauss pour la résolution des équations binomes en y apportant quelques modifications. Sa développement conduit à la construction de W. Richmond. Probablement le but de la théorie élémentaire ébauchée par Ampère a été de stimuler l'activité scientifique des professeurs de l'enseignement moyen.

Dijksterhuis (Oisterwijk, Holl.).

Saltykow, N.: Étude bibliographique de la seconde partie du mémoire inédit de Charpit. *Bull. Sci. math.*, II. s. **61**, 55—64 (1937).

Dans les Archives de l'Académie des Sciences de Paris a été trouvé, en 1928, le Mémoire inédit de Charpit concernant l'intégration des équations aux dérivées partielles, présenté à l'Académie en 1784. Le Mémoire en question consiste en deux parties. La première partie est consacrée aux équations partielles du premier ordre et fut l'objet d'une étude de M. Saltykow en 1930 (*Bull. Sci. math.*, II. s. **54**). Dans l'article présent l'auteur s'occupe de l'analyse de la seconde partie. Charpit y expose la théorie de l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre par la méthode des caractéristiques et l'extension de cette méthode aux équations d'ordre supérieur au second.

O. Borůvka (Brno).

Hardy, G. H.: The Indian mathematician Ramanujan. *Amer. Math. Monthly* **44**, 137—155 (1937).

An sachlichen Einzelheiten wird in diesem Vortrag kaum etwas mitgeteilt, das nicht schon aus früher Veröffentlichtem bekannt ist. Doch sieht und beurteilt Hardy heute in größerem zeitlichen Abstand manches anders als in seiner 1921 geschriebenen, S. XXI—XXXVI der *Collected Papers of Srinivasa Ramanujan* (Cambridge 1927).

abgedruckten Gedächtnisrede, auf deren Formulierungen er verschiedentlich Bezug nimmt. *Bessel-Hagen* (Bonn).

Schiffer, S.: *Les origines de l'astronomie: L'astronomie et l'astrologie babyloniennes.* Thalès. Rec. Ann. Trav. Inst. Hist. Sci. et Techn., Univ. Paris 2, 142—157 (1935).

Sehr allgemein gehaltene Einleitung zu Vorträgen, mit umfangreicher, aber nicht ganz zuverlässiger Bibliographie. *O. Neugebauer* (Kopenhagen).

Schmidt, Olaf: *Bestimmung der Epoche für die Mittelbewegung des Mondes in Breite bei Hipparch und Ptolemäus.* Mat. Tidsskr. B 1937, 27—32 [Dänisch].

Aus einer Stelle in Buch IV Kap. 9 des Almagest wird Hipparchs Methode rekonstruiert, mit deren Hilfe er den Abstand des Mondepizykels von einem Knoten berechnet hat, um daraus die Stellung im Nullpunkt der Zeitskala (die „Epoche“) zu bestimmen. Es wird gezeigt, daß Ptolemäus' eigene Methode einen systematischen Fortschritt gegenüber Hipparch bedeutet insofern, als sie sich ausschließlich auf Finsternisbeobachtungen stützt, ohne irgendwelche Annahmen über die Größe der Mondscheibe und des Erdschattens, die Hipparch benutzt. *O. Neugebauer.*

Lundmark, Knut: *Two early conceptions concerning the earth's hanging free in space.* Meddel. Lunds astron. Observ., II. s. Nr 77, 1—8 (1937).

Perrier: *Historique sommaire de la géodésie.* Thalès. Rec. Ann. Trav. Inst. Hist. Sci. et Techn., Univ. Paris 2, 117—129 (1935).

Larmor, Joseph: *The origins of Clerk Maxwell's electric ideas, as described in familiar letters to W. Thomson.* Proc. Cambridge Philos. Soc. 32, 695—748 (1936).

The manuscripts from the estate of Lord Kelvin were found to contain a number of letters from J. C. Maxwell, covering the period from 1854 till 1878, in which he communicates to his friend the progress of his ideas on the theory of electricity and magnetism. Other subjects as the bending of surfaces, the theory of colours and that of optical instruments are dealt with incidentally. Besides there are remarks on the practice of university teaching and on various mathematical and dynamical topics.

Dijksterhuis (Oisterwijk, Holl.).

Broglie, Louis de: *Un exemple des synthèses successives de la physique: Les théories de la lumière.* Thalès. Rec. Ann. Trav. Inst. Hist. Sci. et Techn., Univ. Paris 2, 9—22 (1935).

Algebra und Zahlentheorie.

Lineare Algebra, Polynome, Invariantentheorie:

Toscano, Letterio: *Su alcuni determinanti dedotti da quello di Vandermonde.* Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, Rend., IV. s. 6, 257—261 (1936).

Obrechhoff, Nikola: *Sur les zéros des fonctions rationnelles.* Rev. math. Union Interbalkan. 1, 91—95 (1936).

Sind $f(z) = A(z - a_1)^{p_1}(z - a_2)^{p_2} \dots (z - a_r)^{p_r}$, $g(z) = B(z - b_1)^{q_1}(z - b_2)^{q_2} \dots (z - b_s)^{q_s}$, $p_1 + p_2 + \dots + p_r = n$, $q_1 + q_2 + \dots + q_s = m$ und bedeuten $p_1, p_2, \dots, p_r, q_1, q_2, \dots, q_s$ beliebige positive Zahlen, so beweist Verf. die Sätze: Die Nullstellen von $f'(z)$ liegen alle im kleinsten konvexen Polygon, das die Punkte a_1, a_2, \dots, a_r enthält. Ist $\zeta = z_0 - n \frac{f(z_0)}{f'(z_0)}$ und ist K ein beliebiger Kreis durch die Punkte z_0 und ζ , so hat $f(z)$ mindestens je eine Nullstelle im Innern und im Äußern von K oder liegen alle Nullstellen von $f(z)$ auf K . Es seien $F(z) = \lambda \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)}$, $\zeta_1 = z_0 - \frac{\lambda n - m}{F(z_0)} \neq z_0$, $\lambda > 0$, $f(z_0)f'(z_0)g(z_0)g'(z_0) \neq 0$. Liegen nun alle Nullstellen von $g(z)$ im Innern und auf dem Rande eines Kreises K durch die Punkte z_0 und ζ_1 , so liegt mindestens eine Nullstelle von $f(z)$ im Innern von K oder liegen alle Nullstellen von $f(z)$ und $g(z)$ auf K . [Bemerkung des Ref.: Die ersten zwei Sätze sind nicht neu. Vgl. eine Arbeit des Ref., Mat. természett. Ért. 38, 445 (1921) und das Buch Pólya-Szegő, Aufgaben und Lehrsätze 1, 89—90, 2, 56—57.] *Sz. Nagy* (Szeged).

Obrechhoff, Nikola: Sur les zéros de quelques classes de polynômes. C. R. Acad. Sci., Paris 204, 1229—1231 (1937).

Es werden ohne Beweis die folgenden Sätze ausgesprochen: Es seien

$$0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 = \dots \leq \alpha_m, \quad \nu_k > -1 \quad (k = 1, 2, \dots, m),$$

$$\left(1 - \frac{x}{\alpha_1}\right)^{\nu_1} \left(1 - \frac{x}{\alpha_2}\right)^{\nu_2} \dots \left(1 - \frac{x}{\alpha_m}\right)^{\nu_m} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots,$$

und es sei N_s ($1 \leq s \leq n-1$) die in der Summe $\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_s$ enthaltene größte ganze Zahl. Sind nun die Zahlen N_1, N_2, \dots, N_m gleichzeitig gerade oder gleichzeitig ungerade und ist $p > \nu = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_m$, so hat das Polynom $P_{p,n}(x) = c_p + c_{p+1}x + \dots + c_{p+n}x^n$ höchstens eine reelle Nullstelle. Dieses Polynom hat auch im Winkelraum $W - \frac{\pi}{n+1} \leq \arg x \leq \frac{\pi}{n+1}$ (im Falle gerader n auch im Scheitelwinkelraum von W) keine Nullstelle. — Bezeichnet $D(x) = d_0 + d_1 x + \dots = d_n x^n$ bzw. $D'(x)$ ein positiv definites Polynom n -ten bzw. $(n-1)$ -ten Grades, so hat das Polynom $Q_{p,n}(x) = d_0 c_p + d_1 c_{p+1} x + \dots + d_n c_{p+n} x^n$ ($p > \nu$) keine bzw. nur eine reelle Nullstelle, je nachdem n eine gerade bzw. ungerade Zahl ist. — Verf. spricht auch einige Verallgemeinerungen dieses Satzes aus. Sz. Nagy (Szeged).

Barba, G.: Polinomi definiti. II. Classi di polinomi definiti ottenuti da alcuni prefissati. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 24, 497—504 (1937).

Verf. betrachtet verschiedene Transformationen, welche nichtindefinite Polynome wieder in nichtindefinite Polynome überführen. Zu ihnen gehören: a) $f(x) \rightarrow f(x + \alpha)$;

b) $f(x) \rightarrow f(\alpha x)$; c) $f(x) \rightarrow \frac{1}{x^\alpha} \int_0^x x^{\alpha-1} f(x) dx$, wobei α eine reelle (im dritten Fall positive)

Konstante bedeutet. Durch Kombination dieser Transformationen und Benutzung der Kriterien $a_{2r-1}^2 \leq 2a_{2r-2} \cdot a_{2r}$ ($r = 1, \frac{n}{2}$), $a_{2s-1}^2 - a_{2s-2} \cdot a_{2s} \leq 0$ ($s = 2, \dots, \frac{n}{2} - 1$) gewinnt der Verf. einige neue Kriterien. (I. vgl. dies. Zbl. 16, 49.) N. Tschebotarow.

Petterson, Erik L.: Über die Irreduzibilität ganzzahliger Polynome. Uppsala: Diss. 1936.

Schulz, Werner: Über Teilbarkeit bei hypergeometrischen Polynomen. Deutsche Math. 2, 110—117 (1937).

Der Verf. untersucht die Teilbarkeit der hypergeometrischen Polynome vom Typ

$$P_n(\alpha, \beta, x) = \frac{\text{const}}{(1-x)^\alpha (1+x)^\beta} \frac{d^n}{dx^n} ((1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}).$$

Damit nämlich $P_n(\alpha, \beta, x)$ durch $P_m(\alpha, \beta, x)$ teilbar sei, muß bei $\alpha, \beta \neq \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ die Ungleichung $m \leq \frac{n}{3}$ erfüllt sein. $P_{2m+1}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x)$ ist durch $P_m(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x)$ teilbar. Andererseits kann man für jedes n die Werte von α, β derart angeben, daß $P_n(\alpha, \beta, x)$ durch $P_m(\alpha, \beta, x)$ teilbar ist, wobei $m = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ ist. — Daraus folgt, daß das Tschebyscheffsche Polynom $T_n(x)$ in $\tau'(n)$ irreduzible rationale Faktoren zerfällt, wobei $\tau'(n)$ die Anzahl der ungeraden Teiler von n bedeutet. Seine Derivierte $T'_n(x)$ zerfällt in $\tau(n) + \tau'(n) - 2$ irreduzible rationale Faktoren. Das Polynom $S_n(x) = \frac{1}{2} + T_1(x) + T_2(x) + \dots + T_n(x)$ zerfällt in $\tau(2n+1) - 1$ irreduzible rationale Faktoren. — Der Verf. stellt auch die Gradzahlen dieser irreduziblen Faktoren auf. N. Tschebotarow (Kasan).

Molsen, Karl: Zum Dumasschen Satz über die Zerlegung von Polynomen. Deutsche Math. 2, 117—126 (1937).

Der Verf. beweist auf idealtheoretischem Wege folgenden zuerst von G. Dumas [J. Math. pures appl. (6) 2, 191—258 (1906)] bewiesenen Satz: Sind k_1, k_2, \dots, k_r die gemeinsamen Nenner der konjugierten p -adischen Reihenentwicklungen der Wurzeln eines Polynoms $f(x)$, die in den Vielfachheiten bzw. e_1, e_2, \dots, e_r vorkommen, so muß jeder irreduzible Faktor von $f(x)$ einen Grad von der Gestalt $\varepsilon_1 k_1 + \dots + \varepsilon_r k_r$

haben, wobei die ε_i ganzzahlig sind und $0 \leq \varepsilon_i \leq e_i$ gilt. — Daraus folgert er einige Irreduzibilitätskriterien. *N. Tschebotarow (Kasan).*

Krull, Wolfgang: Über einen Irreduzibilitätssatz von Bertini. *J. reine angew. Math.* **177**, 94—104 (1937).

Mit Hilfe des E. Noetherschen algebraischen Kriteriums für absolute Irreduzibilität (das übrigens neu hergeleitet wird) wird gezeigt: Ein Polynom $p(x, \lambda) = p(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_r)$, das über dem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper K irreduzibel ist, aber bei jeder Spezialisierung der λ in K reduzibel wird, ist als Polynom in x_1, \dots, x_n absolut reduzibel, d. h. zerfällt in Polynome in den x , deren Koeff. algebraisch über $K(\lambda)$ sind. Ist nun $p(x, \lambda)$ linear in $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, so gibt es nur 2 Fälle, in denen diese absolute Reduzibilität auftritt, nämlich:

$$1. \quad p(x, \lambda) = \sum_0^m l_v(\lambda) \varphi(x)^{m-v} \psi(x)^v,$$

$$2. \quad p(x, \lambda) = q(x_1^p, x_2^p, \dots, x_n^p, \lambda_1, \dots, \lambda_r),$$

wobei p die Charakteristik von K ist. Diese Aussage ist eine algebraische Verschärfung eines bekannten geometrischen Satzes von Bertini [*Rend. Ist. Lomb.* **15** (1882)]. — Ein zweiter Beweis des Bertinischen Satzes ergibt sich aus einem Satz von Salomon, der nach Riehle sehr einfach bewiesen wird und besagt: Ist $p(x, \lambda)$ vom Grade γ in dem einen Parameter λ und absolut reduzibel, aber irreduzibel in $K(x, \lambda)$, so haben die Faktoren von $p(x, \lambda)$ in einem passenden separablen Erweiterungskörper von $K(\lambda)$ die Gestalt

$$\varphi_0(x) + \varrho_1 \varphi_1(x) + \dots + \varrho_\mu \varphi_\mu(x), \quad \mu \leq \gamma.$$

van der Waerden (Leipzig).

Carlitz, Leonard: Sums of squares of polynomials. *Duke math. J.* **3**, 1—7 (1937).

Bestimmung der Anzahl der Darstellungen der Null als

$$0 = \alpha_1 Y_1^2 + \dots + \alpha_t Y_t^2,$$

wobei $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ gegebene Elemente eines $GF(p^n)$ mit $p > 2$ und $\alpha_1 + \dots + \alpha_t = 0$ sind, während Y_1, \dots, Y_t normierte Polynome vom Grade k in einer Variablen über $GF(p^n)$ sein sollen. *van der Waerden (Leipzig).*

Carlitz, Leonard: Some formulas for factorable polynomials in several indeterminates. *Bull. Amer. Math. Soc.* **43**, 299—304 (1937).

G bezeichne allgemein jedes Polynom in x_1, \dots, x_k über $GF(q)$, welches in einem passenden Erweiterungskörper in Linearfaktoren zerfällt; G^* bezeichnet ein G vom Grade m , in welchem x_k^m wirklich vorkommt; $|G|$ bedeutet q^m , wenn m der Grad von G ist. Dann gilt

$$\zeta^*(w) = \sum_{G^*} |G|^{-w} = (1 - q^{k-w})^{-1},$$

$$\zeta(w) = \sum_G |G|^{-w} = \prod_{j=1}^k (1 - q^{j-w})^{-1}$$

(vgl. Carlitz, dies. Zbl. **15**, 293). Ist $\mu(G)$ die Möbiussche Funktion, so folgt

$$\sum_{G^*} \frac{\mu(G)}{|G|^w} = 1 - q^{k-w}; \quad \sum_G \frac{\mu(G)}{|G|^w} = \prod_{j=1}^k (1 - q^{j-w}).$$

Daraus kann $\sum \mu(G)$, summiert über alle G vom Grade m , und ebenso $\sum \mu(G^*)$ berechnet werden. Ist $\tau(G)$ die Zahl der Teiler von G , so werden $\sum \tau(G)$ und $\sum \tau(G^*)$ für den Grad m in ähnlicher Weise aus

$$\sum_{G^*} \frac{\tau(G)}{|G|^w} = (1 - q^{k-w})^{-2}; \quad \sum_G \frac{\tau(G)}{|G|^w} = \prod_{j=1}^k (1 - q^{j-w})^{-2}$$

entnommen. Ähnlich wird die Funktion $\sigma_t(G) = \sum_{G|D} |D|^t$ behandelt. Sodann werden die Anzahlen $\varphi_s(G)$ und $\varphi_s^*(G)$ der Polynome A bzw. A^* vom Grade s mit $(A, G) = 1$ berechnet; $\varphi_m(G)$ entspricht der Eulerschen φ -Funktion. Schließlich werden die Anzahl und das Produkt der Polynome L bzw. L^* vom Grade m , die nicht durch die erste Potenz eines Primfaktors teilbar sind, ausgerechnet. *van der Waerden.*

Mignosi, Gaspare: Eliminazione nei sistemi di equazioni algebriche in un corpo finito. Scritti mat. off. a Luigi Berzolari 249—260 (1936).

$$f_k(x) = \sum_{v=0}^{n_k} a_{kv} x^v, \quad k = 1, 2, \dots, r; a_{k0} \neq 0$$

$$g_k(x) = \sum_{v=0}^{m_k} b_{kv} x^v, \quad k = 1, 2, \dots, s; b_{k0} \neq 0$$

seien Polynome im Galoisfeld Γ der Charakteristik p mit $N = p^w$ Elementen. Die Grade n_k, m_k seien kleiner als p . Die Anzahl der Lösungen von $f_1(x) = 0, \dots, f_r(x) = 0, g_1(x) \neq 0, \dots, g_s(x) \neq 0$ in Γ ist gleich

$$Z_{f_1 \dots f_r \bar{g}_1 \dots \bar{g}_s} = \sum_{i=1}^{N-1} [1 - f_1^{N-1}(\omega^i)] \dots [1 - f_r^{N-1}(\omega^i)] g_1^{N-1}(\omega^i) \dots g_s^{N-1}(\omega^i),$$

wenn dieses Element des Primkörpers von Γ als nicht negative ganze Zahl $< p$ geschrieben wird, ω ist eine Primitivzahl von Γ . Führt man die Koeffizienten von

$$f_k(x)^{N-1} = \sum_{v=0}^{n_k(N-1)} A_{kv} x^v \text{ und } g_k(x)^{N-1} = \sum_{v=0}^{m_k(N-1)} B_{kv} x^v \text{ ein, die sich leicht durch die } a_{kv}, b_{kv}$$

ausdrücken lassen, so wird

$$Z_{\bar{g}_1 \dots \bar{g}_s} = - \sum_{\substack{0 \leq j_v \leq m_v(N-1) \\ j_1 + \dots + j_s \equiv 0 \pmod{N-1}}} B_{j_1 1} \dots B_{j_s s},$$

woraus man zufolge der Identität

$$Z_{f_1 \bar{g}_1 \dots \bar{g}_s} = Z_{\bar{g}_1 \dots \bar{g}_s} - Z_{f_1 \bar{g}_1 \dots \bar{g}_s}$$

leicht

$$Z_{f_1 \dots f_r \bar{g}_1 \dots \bar{g}_s} = (-1)^2 \sum_{\substack{1 \leq i_v \leq n_v(N-1); 0 \leq j_v \leq m_v(N-1); i_1 + \dots + i_r + j_1 + \dots + j_s \equiv 0 \pmod{N-1}}} A_{i_1 1} \dots A_{i_r r} B_{j_1 1} \dots B_{j_s s}$$

ableitet. Für $s=0$ heiße $Z_{f_1 \dots f_r}$ die arithmetische Resultante der f_k , weil ihr Nichtverschwinden die Existenz gemeinsamer Nullstellen der f_k in Γ anzeigt. Mehrfache Nullstellen von $f(x)$ in Γ gibt es genau dann, wenn die arithmetische Diskriminante $Z_{ff'}$ von 0 verschieden ist. Die Gesamtzahl der Nullstellen von f in Γ , mit ihren Vielfachheiten gezählt, ist

$$\sum_r r Z_{ff'} \dots f^{(r-1)} f^{(r)}.$$

Beispiele arithmetischer Resultanten:

$$1. f_v = a_{v0} + a_{v1}x; \quad Z_{f_1 \dots f_r} = [1 - (a_{10}a_{21} - a_{20}a_{11})^{N-1}] \dots [1 - (a_{r0}a_{r1} - a_{r0}a_{11})^{N-1}].$$

$$2. f(x) = a - x^n, \quad g(x) = b - x^n;$$

$$Z_{fg} = (N-1) \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ a^{\frac{N-1}{n}+1} - b^{\frac{N-1}{n}+1} \right\} \frac{1}{a-b} + (ab)^{\frac{N-1}{n}+1} \frac{a^{\frac{(n-1)(N-1)}{n}+1} - b^{\frac{(n-1)(N-1)}{n}+1}}{a-b}.$$

$$3. f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2, \quad g(x) = b_0 + b_1x, \quad Z_{fg} = 1 - (a_0b_1^2 - a_1b_0b_1 + a_2b_0^2)^{N-1}.$$

$$4. f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2, \quad p \neq 2; \quad Z_{ff'} = 1 - (a_1^2 - 4a_0a_2)^{\frac{N-1}{2}}.$$

$$Z_{f\tilde{f}} = (a_1^2 - 4a_0a_2)^{N-1} + (a_1^2 - 4a_0a_2)^{\frac{N-1}{2}},$$

Anzahl der Nullstellen:

$$Z_{f\tilde{f}} + 2Z_{ff'} = 2 + (a_1^2 - 4a_0a_2)^{\frac{N-1}{2}} - (a_1^2 - 4a_0a_2)^{N-1}.$$

Deuring (Jena).

Abstrakte Theorie der Ringe, Körper und Verwandtes:

Dantzig, D. van: Nombres universels ou $v!$ -adiques avec une introduction sur l'algèbre topologique. Ann. École norm., III. s. 53, 275—307 (1936).

As a special case of b_v -adic rings (van Dantzig, Zur topologischen Algebra. Compositio Math. 1935 or this Zbl. 12, 6) the author considers the ring \mathfrak{S} of universal numbers as the completion of the ring \mathfrak{R} of rational integers by means of the ideals

$b_v = (v!)$ as neighborhoods of 0. The present paper develops analogues for \mathfrak{J} of a number of elementary arithmetic properties of \mathfrak{K} . Every closed ideal in \mathfrak{J} is principal and any b_v -adic completion of \mathfrak{K} is a difference ring of \mathfrak{J} relative to a closed ideal. If a is a universal number such that the ideal (a) is idempotent then a^x may be defined for any universal x and is a continuous function of a and of x . The usual rules for exponents hold. The order of a is the ideal \mathfrak{b} of all elements b such that $a^b = a^0$. If \mathfrak{G} is a Cantorian group (compact zero-dimensional) then its order may be defined as a certain ideal in \mathfrak{J} . If \mathfrak{b} is a closed ideal and $\mathfrak{G}_{\mathfrak{b}} = \mathfrak{G}/\mathfrak{b}$ where \mathfrak{G} is the group of elements in \mathfrak{J} prime to \mathfrak{b} and \mathfrak{b} those $\equiv 1 \pmod{\mathfrak{b}}$ then the Euler indicatrix $\varphi(\mathfrak{b})$ is defined as the order of $\mathfrak{G}_{\mathfrak{b}}$. A formula for $\varphi(\mathfrak{b})$ analogous to the usual one is obtained. The author considers finally the group of solutions of the equation $x^a = 1$ where \mathfrak{a} is a closed ideal. It is shown that a primitive solution exists i. e. one such that $x^c = 1$ implies $c \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}}$. The order of the group of solutions is divisible by \mathfrak{a} and equals \mathfrak{a} if and only if \mathfrak{a} is idempotent.

Jacobson (Princeton).

Jacobson, N.: Simple Lie algebras of type A. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 23, 240—242 (1937).

Hat ein einfaches assoziatives hyperkomplexes System \mathfrak{A} einen involutorischen Antiautomorphismus J , so bilden alle Elemente aus $[\mathfrak{A}\mathfrak{A}]$ mit $J(a) = -a$ eine einfache Lie-Algebra \mathfrak{L} . Läßt J das Zentrum von \mathfrak{A} nicht fest, so hat der Liesche Ring \mathfrak{B} den Typus A_{II} (Bezeichn. s. Landherr, dies. Zbl. 11, 245). Umgekehrt kommt man von einem \mathfrak{B} vom Typus A_{II} auch zu einem \mathfrak{A} . Die Zuordnung $\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}$ ist eindeutig, der Antiautomorphismus ist durch \mathfrak{B} bis auf Transformation mit einem Element $S \cdot J(S)$ bestimmt. So kommt man auf die Diskussion von hermiteschen Formen über dem Schiefkörper von \mathfrak{A} . Die Ergebnisse werden vorläufig ohne Beweise mitgeteilt.

Landherr (Rostock).

Scorza, Gaetano: Le algebre regolari e le varietà di Segre che con esse si riconnettono. Scritti mat. off. a Luigi Berzolari 33—65 (1936).

L'Auteur considère une algèbre complète de matrices d'ordre n à éléments réels ou complexes. A chaque matrice, il fait correspondre dans l'espace S_n le point ayant pour coordonnées les éléments de cette matrice. Il établit un certain nombre de propriétés géométriques concernant 1° les variétés représentant les classes d'automodules équivalents; 2° le groupe des affinités correspondant dans S_n au groupe des automorphismes de l'algèbre. Au point de vue géométrique, le fait intéressant est le rôle joué par des variétés de Segre. L'Auteur utilise non seulement les résultats, mais la terminologie de son Ouvrage Corpi numerici e algebre (Messina, Principato 1921); la terminologie moderne serait peut-être plus commode pour le lecteur (automodule = élément idempotent, etc.).

P. Dubreil (Nancy).

Zahl- und Funktionenkörper:

Albert, A. A.: A note on matrices defining total real fields. Bull. Amer. Math. Soc. 43, 242—244 (1937).

Ist D eine Diagonalmatrix mit positiven Diagonalelementen aus einem reellen Zahlkörper F und S eine symmetrische Matrix über F , so daß die charakteristische Funktion der Matrix $Z = DS$ irreduzibel über F ausfällt, dann ist $F(Z)$ ein total-reeller Erweiterungskörper von F , und jeder totalreelle Erweiterungskörper kann so erhalten werden.

van der Waerden (Leipzig).

Mordell, L. J.: Homogenous linear forms in algebraic fields. Quart. J. Math., Oxford Ser. 8, 54—57 (1937).

Die vorliegende Arbeit verallgemeinert den bekannten Minkowskischen Satz über homogene Linearformen insofern, als die Variablen ganze Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers sind. Es sei K ein beliebiger algebraischer Zahlkörper vom Grad n , $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ eine Basis für die ganzen Zahlen von K . Es sei $X_u = x_{u1}\omega_1 + \dots + x_{un}\omega_n$, wo x_u ganz rational, X_u also ganz in K . Ferner sei $L_u = a_{u1}X_1 + \dots + a_{um}X_m$.

Frage: Gibt es X_u , so daß $|L_u|$ unterhalb gewissen Schranken ($u = 1, 2, \dots, m$). Durch Betrachten der konjugierten Systeme und Zurückführen auf den Minkowskischen Satz findet der Verf. eine allerdings nicht scharfe Schranke. Hofreiter (Wien).

Bungers, R.: Berichtigung zu der Arbeit: „Über Zahlkörper mit gemeinsamen außerwesentlichen Diskriminantenteilern. (Jahresber. d. D. M. V. 46, S. 93.) Jber. Deutsch. Math.-Verein. 47, 56 (1937).

Vgl. dies. Zbl. 14, 341.

Hensel, Kurt: Über den Zusammenhang zwischen den Kongruenzgruppen eines algebraischen Körpers für alle Potenzen eines Primteilers als Modul. J. reine angew. Math. 177, 82—93 (1937).

K sei ein beliebiger algebraischer Zahlkörper und p irgendein Primteiler in K , der in der rationalen Primzahl p aufgeht. Der zu p gehörige perfekte Erweiterungskörper $K(p)$ von K möge keine primitive p -te Einheitswurzel enthalten; dann ist die Gruppe \mathfrak{G}_0 der Einseinheiten η in $K(p)$ die reine unendliche abelsche Gruppe vom Range $\lambda = e \cdot f$. Die Einseinheiten η bilden mod p^s eine endliche Gruppe \mathfrak{G}_s . Die verschiedenen \mathfrak{G}_s und ihr gegenseitiges Verhältnis werden untersucht; s kann dabei positiv ganz oder von der Form $\frac{s_0}{p^v}$ sein. Durch $r_0 = \frac{e}{p-1}$ ist die Fundamental-invariante von p bez. $K(p)$ gegeben; sie bestimmt den Fundamentalbereich ($r_0 < h \leq r_0 + e$) von $K(p)$. Letzterer enthält genau e ganze Zahlen; unter diesen wird zunächst eine beliebige s_0 ausgewählt und die Untersuchung auf die Kongruenzgruppen \mathfrak{G}_s beschränkt, deren $s = s_v = s_0 \cdot p^v$ ($v = 0, -1, -2, \dots$) oder $s = s_v = s_0 + v e$ ($v = 0, 1, 2, \dots$) ist. Die Intervalle $(\varrho) = (s_\varrho \dots s_{\varrho+1})$, $\varrho = -\infty \dots +\infty$ erfüllen die positive Halbgerade lückenlos. Jeder Einheit $\eta = 1 + w \cdot \pi^h + \dots$ vom h -ten Grade wird auf der so überdeckten Halbgeraden der Gitterpunkt h als Gradpunkt zugeordnet. Liegt der Gradpunkt von η im Intervalle (ϱ) , dann liegt der von η^p im Intervalle $(\varrho + 1)$. Damit ergibt sich die Ordnung von η in \mathfrak{G}_s zu p^{v-e} , und die Anzahl a_ϱ aller Basiseinheiten, die mod p^s die gleiche Ordnung p^{v-e} haben, ist weiter gleich dem f -fachen der Zahl der verschiedenen ganzen zu p primen Zahlen im Intervalle $(\varrho) = (s_\varrho \dots s_{\varrho+1})$, wobei $\varrho < v$ ist. Ausgerechnet ergibt das: $a_\varrho = f(\{s_{\varrho+1}\} - 2\{s_\varrho\} + \{s_{\varrho-1}\})$; $\{t\}$ bedeutet die nächste ganze Zahl vor der positiven Zahl t . Weiter ist die Anzahl der Basiselemente von \mathfrak{G}_{s_v} : $\lambda_v = a_{v-1} + a_{v-2} + \dots = f(\{s_v\} - \{s_{v-1}\})$, und die Ordnung von \mathfrak{G}_{s_v} ist gleich p^{r_v} mit $r_v = f \cdot \{s_v\}$. Umgekehrt sind die λ_v und a_v die erste und zweite Differenzreihe zu den r_v . — Die Beziehungen zwischen den Gruppen \mathfrak{G}_{s_v} , die zur „Grundzahl“ s_0 gehören, und den $\mathfrak{G}_{s'_v}$, die zu $s'_0 = s_0 + 1$ gehören, d. h. deren s'_v zu $s_0 + 1$ p -äquivalent bzw. e -kongruent sind, regelt schließlich der folgende Satz: Hat $s_0 = p^\alpha \cdot \bar{s}_0$ die Ordnungszahl α , so erhält man die Reihe der r'_v aus der der r_v durch Addition von f Einheiten zu r_v von der Stelle $r_{-\alpha}$ an. Ein- bzw. zweimalige Differenzbildung liefert die Reihen der λ'_v und a'_v , die sich also von denen der λ_v bzw. a_v lediglich in den Gliedern $\lambda'_{-\alpha} = \lambda_\alpha + f$ bzw. $a'_{-\alpha+1} = a_{-\alpha+1} \pm f$ unterscheiden. Grunwald (Kiel).

Reichardt, Hans: Konstruktion von Zahlkörpern mit gegebener Galoisgruppe von Primzahlpotenzordnung. J. reine angew. Math. 177, 1—5 (1937).

Es wird eine von der A. Scholzschen (dies. Zbl. 16, 6) verschiedene Lösung des folgenden Problems gegeben: über einem gegebenen Zahlkörper Ω einen relativ normalen Körper mit vorgegebener Gruppe G zu konstruieren, wenn G eine Gruppe von ungerader Primzahlpotenzordnung l^n ist. Scholz verwendet als wichtigstes Hilfsmittel den „Richterschen“ Einbettungssatz, befreit sich jedoch von der Voraussetzung, daß der Grundkörper die l -ten Einheitswurzeln enthalte. Reichardt setzt den Richterschen Einbettungssatz nicht voraus, sondern beweist einen dem Scholzschen „speziellen Einbettungssatz“ ähnlichen Satz von Grund auf. Das Problem wird auf das Folgende zurückgeführt: einen absolut normalen Körper K mit G als Galoisgruppe zu konstruieren, dessen Sockel (= Kompositum aller zyklischen Teilkörper l -ten Grades) eine zu einer gegebenen ganzen rationalen Zahl a teilerfremde Diskriminante hat.

Wählt man nämlich a als Diskriminante des zu Ω gehörigen absolut normalen Körpers N , so ergibt sich, daß K und N , abgesehen vom rationalen Zahlkörper P , keinen Durchschnitt haben. Daher ist $K\Omega/\Omega$ normal mit G als Galoisgruppe. Zum Beweis des zweiten Problems wird eine Reihe von Faktorguppen $G_v, v = 0, 1, \dots, n$ gebildet, wobei $G_n = G$, $G_v/H_v = G_{v-1}$ und H_v eine Untergruppe der Ordnung l des Zentrums von G_v ist. Es wird bewiesen, daß sich schrittweise zu jedem v ein Körper K_v mit G_v als Gruppe konstruieren läßt. Diese Konstruktion wird durch folgenden Einbettungssatz ermöglicht: Ist K_{v-1} ($v < n$) bereits konstruiert und sind sein Diskriminantenteiler (wenn $\neq l$) $\equiv 1 \pmod{l^n}$ und in Primideale 1. Grades zerfallend, so läßt sich K_{v-1} in einen Körper mit G_v als Gruppe einbetten, dessen Diskriminantenteiler dieselben Bedingungen erfüllen und dessen Sockel eine zu a teilerfremde Diskriminante hat. Der Fall, daß H_v direkter Faktor von G_v ist, ist wesentlich einfacher und wird zuerst erledigt. Der wichtigste Fall, daß H_v nicht direkter Faktor ist, wird mit hyperkomplexen Hilfsmitteln behandelt. Ein spezielles Repräsentantensystem der Faktorgruppe G_v/H_v definiert ein Faktorensystem in H_v . Da H_v zyklisch ist, läßt sich das Faktorensystem durch die Potenzen $H^{a_{u,v}}$ einer fest gewählten Erzeugenden H von H_v angeben. Es wird nun gezeigt, daß das verschränkte Produkt von $K_{v-1}(\zeta)/P(\zeta)$, (ζ = primitive l -te Einheitswurzel), mit seiner Galoisgruppe, welche zu G_{v-1} isomorph ist, beim Faktorensystem $\xi^{a_{u,v}}$ eine zerfallende Algebra ist. (Der Zusammenhang zwischen Einbettungsproblemen und zerfallenden Algebren wurde schon früher von R. Brauer und auch K. Shoda bemerkt.) Daher gilt in $K_{v-1}(\zeta)$: $\xi^{a_{u,v}} = \xi_u^v \xi_v^{-1}$. Durch Anwendung eines Satzes von Speiser folgt daraus: $\xi_u = \mu'^{-1}$ mit μ' in $K_{v-1}(\zeta)$. Durch Hinzufügung eines geeigneten Faktors aus $P(\zeta)$ zu μ' wird eine Zahl μ in $K_{v-1}(\zeta)$ gewonnen, welche nicht l -te Potenz einer Zahl in $K_{v-1}(\zeta)$ ist und welche die Eigenschaft hat, daß $K_{v-1}(\zeta, \sqrt[l]{\mu})$ absolut normal ist und einen Erweiterungskörper K'_v von K_{v-1} mit zu G_v isomorpher Galoisgruppe enthält. K'_v hat denselben Sockel wie K_{v-1} . Schließlich wird gezeigt, daß sich der Körper K'_v so konstruieren läßt, daß er die im Einbettungssatz genannten Forderungen erfüllt. Dazu werden teilweise ähnliche Schlüsse wie bei A. Scholz verwendet.

Taussky (Cambridge).

Inaba, Eizi: Über die absoluten Idealklassengruppen algebraischer Zahlkörper. Jap. J. Math. 13, 81—84 (1937).

Sätze über die Beziehungen der Klassengruppe eines Zahlkörpers zu den Klassengruppen seiner Teilkörper. 1. Das direkte Produkt der Klassengruppen zweier Zahlkörper k_1, k_2 mit teilerfremden Diskriminanten ist zu einer Untergruppe der Klassengruppe des Kompositums $k_1 k_2$ isomorph. Man zeigt nämlich leicht, daß das Kompositum $K_1 K_2$ der absoluten Klassenkörper K_1, K_2 von k_1, k_2 über $k_1 k_2$ galoissch mit einer zum direkten Produkt der Galoisgruppen von K_1/k_1 und K_2/k_2 isomorphen Gruppe ist. — 2. Sind die beiden Zahlkörper k_1, k_2 über ihrem Durchschnitt $d = k_1 \cap k_2$ galoissch, so geht das Produkt ihrer Klassenzahlen in dem Produkt der Klassenzahlen von $k_1 k_2$ und d auf, abgesehen von den gemeinsamen Primfaktoren von $(k_1 : d)$ und $(k_2 : d)$. Zum Beweis werden für eine Primzahl $p \nmid ((k_1 : d), (k_2 : d))$ die p -Klassenkörper K_i der k_i und ihr Durchschnitt D herangezogen. Man zeigt leicht $(K_1 K_2 : k_1 k_2)(D : d) = (K_1 : k_1)(K_2 : k_2)$, also, wenn K der p -Klassenkörper von $k_1 k_2$ ist, $(K_1 : k_1)(K_2 : k_2) \mid (K : k_1 k_2)(D : d)$. Daraus folgt die Behauptung, weil sich zufolge der einschränkenden Voraussetzung über p D als der p -Klassenkörper von d erweist. Die Voraussetzung über p ist wesentlich, wie folgendes Beispiel zeigt: p_1, p_2 seien zwei Primzahlen, $p_1 \equiv p_2 \equiv 1 \pmod{4}$, $\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = -1$, $k_1 = R(\sqrt{p_1 p_2})$, $k_2 = R(\sqrt{p_1})$, (R der Körper der rationalen Zahlen), $p = 2$. In ähnlicher Weise wie 2 wird bewiesen: 3. Der absolut galoissche Körper von k_i sei \bar{k}_i . Wenn \bar{k}_1 und \bar{k}_2 über R unabhängig sind, so ist die Klassenzahl von $k_1 k_2$ durch das Produkt der Klassenzahlen von k_1 und k_2 teilbar, abgesehen von gemeinsamen Primfaktoren von $(\bar{k}_1 : R)$ und $(\bar{k}_2 : R)$. Die Unabhängigkeit von \bar{k}_1 und \bar{k}_2 ist wesentlich:

Der imaginäre quadratische Zahlkörper $R(\sqrt{-q})$ habe eine durch p teilbare Klassenzahl und einen p -Klassenkörpersturm K endlichen Grades p^n über $R(\sqrt{-q})$ [vgl. A. Scholz-O. Taussky, dies. Zbl. 9, 102, für die Konstruktion eines solchen $R(\sqrt{-q})$]. In K gibt es einen Körper Ω vom Grade p^n . Es ist $K = \Omega R(\sqrt{-q})$, die Klassenzahl von K ist durch p teilbar, die des Kompositums K von Ω und $R(\sqrt{-q})$ aber nicht. (Vgl. auch Eizi Inaba, dies. Zbl. 11, 146.) *Deuring* (Jena).

Moriya, Mikao: Klassenkörpertheorie im Kleinen für die unendlichen algebraischen Zahlkörper. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I. Math. 5, 9—66 (1936).

Als Vorarbeit für eine Klassenkörpertheorie der abelschen Erweiterungskörper endlichen Grades über einem unendlichen algebraischen Zahlkörper als Grundkörper wird die zugehörige Klassenkörpertheorie im Kleinen ausführlich entwickelt. Sei k der zu einer beliebigen Bewertung des Grundkörpers gehörige perfekte Körper, K ein beliebiger Erweiterungskörper endlichen Grades über k , ferner H die Gruppe der Normen nach k von Zahlen aus K und A die Gruppe aller Zahlen $\neq 0$ aus k . Dann erweist sich der Index $(A:H)$ als ein Teiler des Grades $(K:k)$. Ist K/k abelsch, so gilt aber nicht notwendig Gleichheit, vielmehr ist $(A:H)$ nur gleich dem größten Teiler von $(K:k)$, dessen Primteiler nicht zu unendlich hoher Potenz im absoluten Grade von k aufgehen. Ist K_0/k der maximale abelsche Teilkörper von K/k , dessen Grad zum unendlichen Bestandteil des absoluten Grades von k prim ist, so ist H auch die Normgruppe zu K_0 , und es ist $(A:H) = (K_0:k)$. K/k heißt Klassenkörper zu H , wenn die Gleichung $(A:H) = (K:k)$ besteht. Es gelten dann für die Klassenkörper über k der Isomorphiesatz, Anordnungssatz, Eindeutigkeitssatz, Abgrenzungssatz und Verschiebungssatz wie in der gewöhnlichen Klassenkörpertheorie im Kleinen. Schließlich wird auch der Existenzsatz bewiesen. Neben der schon herausgestellten Beschränkung auf solche abelsche Körper K/k , deren Grad prim zum unendlichen Bestandteil des absoluten Grades von k ist, tritt dabei für die vorkommenden Gruppen H die Beschränkung auf eine Klasse von Gruppen auf, die Verf. als K -Gruppen bezeichnet und die folgendermaßen erklärt sind: Zu H gibt es einen Teilkörper endlichen Grades k^* von k derart, daß für jeden Teilkörper endlichen Grades Σ/k^* von k/k^* der Durchschnitt $H \cap \Sigma$ aus allen denjenigen Elementen von Σ besteht, deren Normen nach k im Durchschnitt $H \cap k^*$ liegen. *Hasse* (Göttingen).

Suetuna, Zyoiti: Abhängigkeit der L -Funktionen in gewissen algebraischen Zahlkörpern. J. reine angew. Math. 177, 6—12 (1937).

In einer früheren Arbeit (s. dies. Zbl. 15, 199) bestimmte Verf. alle möglichen Beziehungen zwischen den Artinschen L -Funktionen $L(s, \chi; K/k)$ für den Fall, daß die Gruppe \mathfrak{H}' des zu k gehörigen galoisschen k' die volle lineare Gruppe mod p ist. Dabei war p der Grad von k über R und $p-1$ als quadratfrei vorausgesetzt. Die Voraussetzung über $p-1$ wird jetzt fallen gelassen; die früher benutzte Methode der Zerlegung der Charaktere von \mathfrak{G} in die von \mathfrak{H} gestattet dann nicht mehr, die Abhängigkeiten zwischen den L -Reihen zu erfassen. Die besonderen Eigenschaften der linearen Gruppe lassen Verf. trotzdem zu einer Übersicht über sämtliche Beziehungen zwischen den $L(s, \chi_j)$ gelangen. — Nimmt man $\mathfrak{H}'\tau = (z, z+1)$, $\mathfrak{H}'\varrho = (z, z^q \cdot z)$ mit $q = \frac{p-1}{h}$, $h = [k':k]$, also $\mathfrak{G} = \mathfrak{H} + \mathfrak{H}\tau \dots + \mathfrak{H}\tau^{p-1}$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}' + \mathfrak{H}'\varrho \dots + \mathfrak{H}'\varrho^{h-1}$, ist ferner $\hat{\chi}(\sigma)$ ein erzeugender Charakter von $\mathfrak{H}/\mathfrak{H}'$, ψ ein einfacher Charakter von \mathfrak{H}' , χ ein dieses ψ enthaltender Charakter von \mathfrak{H} , dann gilt folgender Satz: $\psi(\varrho^i \tau^j \sigma \tau^{-j} \varrho^{-i})$, $0 \leq i \leq n-1$, $0 \leq j \leq p-1$ seien genau die voneinander verschiedenen konjugierten zu ψ und $\psi(\sigma) = \psi(\varrho^n \sigma \varrho^{-n})$; $\chi(\sigma) = m(\psi(\sigma) + \dots + \psi(\varrho^{n-1} \sigma \varrho^{-n+1}))$, $m^2 \cdot n = e$; weiter sei $\chi^{(\lambda)}(\sigma) = \chi_{\psi^{(\lambda)}}(\sigma)$ mit $\psi^{(\lambda)}(\sigma) = \psi(\tau^{w^{\lambda-1}} \sigma \tau^{-w^{\lambda-1}})$, $1 \leq \lambda \leq qn$, dann ist $L(s, \chi^{(1)}) = \dots = L(s, \chi^{(qn)})$ und $L(s, \chi^{(1)}) = \left(\prod_{i=0}^{t-1} L(s, \chi \hat{\chi}^i) \right)^m$, $t = \frac{h}{e}$. Weitere Relationen gibt es nicht. *Grunwald* (Kiel).

Zahlentheorie:

Elder, J. D.: Errata in the Lehmer factor stencils. Bull. Amer. Math. Soc. 43, 253—255 (1937).

Bang, A. S.: Über Mersennese Zahlen. Mat. Tidsskr. B 1937, 59—60 [Dänisch].

Verf. gibt einige Zahlen der Form $2^p - 1$ (p Primzahl) an, die keine Primzahlen sind und von denen dies anscheinend noch nicht bekannt war. Insbesondere ist $2^p - 1$ für $p = 557, 577, 601, 619, 929$ durch eine Primzahl der Form $2pq + 1$ teilbar, wo q eine von p verschiedene ungerade Primzahl ist. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

Hall, Marshall: Divisors of second-order sequences. Bull. Amer. Math. Soc. 43, 78—80 (1937).

The problem discussed in this paper is that of deciding whether or not any term of the sequence (1): $u_0, u_1, u_2, u_3, \dots$ in which $u_{n+2} = au_{n+1} - bu_n$, is divisible by the prime p when a, b, u_0, u_1 are given integers. This problem was considered previously by Ward (this Zbl. 11, 295) and solved by comparing the period modulo p of the Lucas series ($u_0 = 0, u_1 = 1$) with the same recurrence as (1) with the period of another Lucas series under the assumption that the former period is odd. In the present paper this restriction is dropped. The second Lucas series is chosen differently. The two series are then (2) $U_{n+2} = aU_{n+1} - bU_n$ and (3) $U'_{n+2} = (au_0 - 2u_1)U'_{n+1} - (u_1^2 - au_0u_1 + bu_0^2)U'_n$. In case p happened to divide and one of $u_0, u_1, a^2 - 4b$, or any of the coefficients of (2) or (3) the problem is easily answered. For all other primes the main result (which is misquoted in the theorem) may be stated as follows: The prime p divides some term of (1) if and only if the restricted period of (3) modulo p divides that of (2). *D. H. Lehmer* (Bethlehem, Pa.).

Carlitz, Leonard: On certain arithmetic functions of several arguments. Bull. Amer. Math. Soc. 43, 109—114 (1937).

In connection with a certain transformation of multiple sums of numerical functions of several variables the author defines for every pair of positive integers k and $s \leq k$ a generalisation of the Möbius function $\mu^s(m_1, m_2, \dots, m_k)$ by assigning to the sum $\sum_{\delta_i | m_i} \mu^s(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k)$ the value 0 if any s of the m_i have a common factor > 1 ; otherwise the sum is equal to unity. If $k = s = 1$ we have the Möbius function $\mu(m)$. The general function is "multiplicative" so that its evaluation may be effected by considering only prime power values of the arguments. This the author does with the result that the function is either zero or a product of certain binomial coefficients. The φ -functions of Euler and Jordan are generalised in a similar way as is also the familiar relation $\sum_{d|n} d\mu(\delta) = \varphi(n)$. *D. H. Lehmer* (Bethlehem, Pa.).

Mordell, L. J.: An application of quaternions to the representation of a binary quadratic form as a sum of four linear squares. Quart. J. Math., Oxford Ser. 8, 58—61 (1937).

In einer früheren Arbeit [Quart. J. Math., Oxford Ser. 1, 276—280 (1930)] zeigte Verf. den folgenden Satz: „Die positiv-definite quadratische Binärform $f(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2$ mit ganzen rationalen Koeffizienten läßt sich dann und nur dann als Summe der Quadrate von vier Linearformen in x, y mit ganzen rationalen Koeffizienten darstellen, wenn $\Delta = ab - h^2 > 0$ die Summe dreier rationalen Quadrate ist.“ In der vorliegenden Note wird hierfür ein sehr einfacher neuer Beweis gegeben, der Gebrauch von den Eigenschaften der Elemente des Hurwitzschen Quaternionenkörpers H macht (s. A. Hurwitz, Zahlentheorie der Quaternionen. Berlin: Julius Springer 1919). Damit nämlich $f(x, y)$ als Summe von vier Quadraten dargestellt werden kann, muß eine Zerlegung

$$f(x, y) = (U_1x + V_1y)(U_2x + V_2y) \quad (1)$$

bestehen, wo U_1, V_1 ganze Zahlen aus H , U_2, V_2 die hierzu konjugierten Zahlen sind; eine solche Zerlegung (1) hinwieder ist äquivalent mit einer Darstellung von Δ als

Summe dreier rationaler Quadrate, wie aus einfachen Identitäten, den Primzahlzerlegungsgesetzen in H und der Eigenschaft von H , keine Nullteiler $\neq 0$ zu enthalten, folgt. *Mahler* (Krefeld).

Mahler, Kurt: Neuer Beweis eines Satzes von A. Khintchine. *Rec. math. Moscou*, N. s. 1, 961—962 (1936).

Rein arithmetischer, sehr einfacher Beweis der zweiten Hälfte eines Übertragungssatzes des Ref. [*Rend. Circ. mat. Palermo* 50, 170—195 (1926)]. *A. Khintchine*.

Tehudakoff, N.: On the difference between two neighbouring prime numbers. *Rec. math. Moscou*, N. s. 1, 799—813 (1936).

This is a sequel to the author's paper reviewed in this Zbl. 15, 198. Typical results are

$$\pi(x+y; k; l) - \pi(x; k; l) = \frac{y}{\Phi(k) \log x} + o\left(\frac{y}{\log x}\right),$$

where $\pi(x; k; l)$ is the number of primes of the form $kn + l$ less than or equal to x , and

$$y = x^{\frac{3}{4} + \frac{3 \log \log x}{c_1 (\log x)^{y'}}}, \quad 0 < y' < 1$$

and if π_1, π_2, \dots are primes of the form $kn + l$,

$$\pi_{n+1} - \pi_n = O(\pi_n^{1+\varepsilon}). \quad E. C. Titchmarsh.$$

Hua, Loo-Keng: On Waring's problem. *Tôhoku Math. J.* 42, 210—225 (1936).

An exposition is given of the Waring problem for integral valued polynomials.

See this Zbl. 15, 388. *G. Pall* (Montreal).

Jarník, Vojtěch: Sur les approximations diophantiques simultanées. *Acad. Tchèque Sci., Bull. int.* 36, 37—44 (1935).

Es sei $s \geq 2$ ganz; $\beta_1(\theta_1, \dots, \theta_s)$ und $\beta_2(\theta_1, \dots, \theta_s)$ mögen wie in dies. Zbl. 13, 53f. definiert sein. Aus einer Khintchineschen Ungleichung [a. a. O., Formel (1)] folgt: Ist $\beta_2 = 0$ (bzw. ∞), so ist auch $\beta_1 = 0$ (bzw. ∞). — In der vorliegenden Arbeit zeigt Verf., daß, von diesen Fällen abgesehen, β_1 nicht durch β_2 eindeutig bestimmt ist, und zwar: Es sei $0 < \beta < \infty$. Dann kann man $\theta_1, \dots, \theta_s$ und $\theta'_1, \dots, \theta'_s$ so wählen, daß

$$\beta_2(\theta_1, \dots, \theta_s) = \beta_2(\theta'_1, \dots, \theta'_s) = \beta, \quad \beta_1(\theta_1, \dots, \theta_s) \neq \beta_1(\theta'_1, \dots, \theta'_s).$$

(Vgl. hierzu die abschließenden Ergebnisse des Verf. dies. Zbl. 13, 53 u. 15, 294.)

A. Walfisz (Tiflis).

Gruppentheorie.

Boggs, Herbert, and G. Y. Rainich: Note on group postulates. *Bull. Amer. Math. Soc.* 43, 81—84 (1937).

Die Gruppenaxiome werden nur unter Verwendung der Rechts- und Links-Divisionen ohne Annahmen über die Multiplikation aufgebaut. Bekanntlich (s. R. Baer und F. Levi, vgl. dies. Zbl. 4, 338) sind hierfür die beiden Existenz- und Unitätsaxiome sowie das Assoziativgesetz nicht ausreichend. Die Verff. fügen deshalb noch folgendes Axiom hinzu: „ c = Rechtsquotient $a : b$ ist gleichbedeutend mit b = Linksquotient $a : c$ “, und gelangen so zu einem vollständigen Axiomensystem. *Friedrich Levi*.

Hopkins, Charles: Concerning uniqueness-bases of finite groups with applications to p -groups of class 2. *Trans. Amer. Math. Soc.* 41, 287—313 (1937).

Unter einer U -Basis einer endlichen Gruppe \mathfrak{G} versteht man nach P. Hall (s. dies. Zbl. 7, 291) ein System von Elementen Q_i ($i = 1, 2, \dots, r$) der Ordnung g_i , so daß jedes Element von \mathfrak{G} sich eindeutig in der Form

$$Q_1^{x_1} Q_2^{x_2} \dots Q_r^{x_r} \quad (0 \leq x_i < g_i)$$

schreiben läßt. Aus den Kriterien für die Existenz einer U -Basis, die der Autor ableitet, ergibt sich, daß große Klassen der bekannten endlichen Gruppen eine solche besitzen. Um zu einer eine Gruppe schärfer charakterisierenden Eigenschaft zu gelangen, definiert Verf. eine „normale U -Basis“ als eine solche, in der für $i < j$ stets

$Q_j Q_i$ gleich $Q_i \prod_{\lambda=0}^{r-\lambda} Q_{j+\lambda}^{\beta_{j,i,j+\lambda}}$ wird, und zeigt, daß dann \mathfrak{G} durch diese Relationen und

die g_i eindeutig bestimmt wird; ferner erweitert er den Begriff der normalen U -Basis zum Begriff der hinsichtlich einer gegebenen Automorphismengruppe Ψ von \mathfrak{G} normalen U -Basis; eine solche existiert stets für endliche Gruppen, deren sämtliche von Ψ verschiedenen Elemente die Primzahlordnung p besitzen, wenn Ψ selber eine p -Gruppe ist. Ist $g_i \geq g_j$ für $i < j$, und gilt für die oben definierten $\beta_{j,i,j+\lambda}$, daß $\beta_{j,i,j} \equiv 1$, $\beta_{j,i,j+\lambda} \equiv 0 \pmod{p}$ ist für $\lambda > 0$, so heißt die von den Q_i gebildete U -Basis „ ω -normal“. Die regulären p -Gruppen von Hall (s. oben) besitzen stets eine ω -normale U -Basis; dies ergibt eine einfache Konstruktion einer Darstellung der regulären p -Gruppen \mathfrak{P} durch Matrizen, deren Spalten als Elemente Restklassen nach Potenzen von p besitzen. Hieran schließt sich eine Darstellung von \mathfrak{P} durch Elemente eines Ringes an, der aus einem nilpotenten Ring durch Hinzufügung eines Einheitselementes entsteht; die letztere Art der Darstellung wird insbesondere für metabelsche Gruppen \mathfrak{P} , d. h. solche, deren Faktorgruppe nach dem Zentrum abelsch ist, näher diskutiert.

Magnus (Frankfurt a. M.).

Frame, J. Sutherland: The degrees of the irreducible components of simply transitive permutation groups. Duke math. J. 3, 8—17 (1937).

\mathfrak{G} sei eine einfach transitive Permutationsgruppe vom Grad n und der Ordnung g . Sie sei als lineare Gruppe n -reihiger Matrizen geschrieben. k_1, \dots, k_λ seien die Anzahlen der Elemente in den einzelnen Transitivitätsklassen, in die die Zahlen $1, \dots, n$ durch die Untergruppe der 1 festlassenden Permutationen eingeteilt werden. \mathfrak{G} zerfällt ferner in $\lambda' = \lambda$ irreduzible Komponenten der Grade n_1, \dots, n_λ . Sei $K = k_1 k_2 \dots k_\lambda$, $N = n_1 \dots n_\lambda$. Verf. vermutet folgenden Satz: $n^{\lambda'-1} K/N$ ist eine ganze Zahl, wenn die irreduziblen Komponenten alle verschieden sind, und ist ein Quadrat, wenn alle k_i verschieden sind. Für $\lambda = 2, 3$ wird dies bewiesen, ferner für eine bestimmte Klasse von Gruppen mit beliebig großem λ . Anwendungen zur Bestimmung der Ordnung der irreduziblen Bestandteile einer hyperorthogonalen Gruppe. G. Köthe (Münster i. W.).

Rohrbach, Hans: Anwendung eines Satzes der additiven Zahlentheorie auf eine gruppentheoretische Frage. Math. Z. 42, 538—542 (1937).

Ist eine endliche Gruppe \mathfrak{G} der Ordnung g gegeben und gibt es für eine natürliche Zahl h einen Komplex \mathfrak{K} von κ Elementen derart, daß $\mathfrak{K}^h = \mathfrak{G}$ und $\kappa < c^h \sqrt{g}$ ist, wo c eine von g unabhängige positive Zahl bedeutet, so nennt Verf. \mathfrak{K} eine beschränkte Basis h -ter Stufe für die Gruppe \mathfrak{G} (nach Ansicht des Ref. erhält allerdings dieser Begriff erst in bezug auf eine gegebene Gruppenmenge einen präzisen Sinn). Mit Hilfe eines zahlentheoretischen Satzes des Verf. (dies. Zbl. 15, 200) wird nun bewiesen: 1. Für eine Abelsche Gruppe der Ordnung g mit r Basiselementen (im üblichen Sinn) gibt es eine beschränkte Basis h -ter Stufe mit $\kappa < h^r \sqrt{g}$; 2. \mathfrak{G} sei eine beliebige Gruppe endlicher Ordnung und \mathfrak{A} eine invariante Untergruppe von \mathfrak{G} , dann besitzt \mathfrak{G} eine beschränkte Basis zweiter Stufe, falls \mathfrak{A} und $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ diese Eigenschaft haben; 3. jede auflösbare Gruppe hat eine beschränkte Basis zweiter Stufe. Ist dabei g die Ordnung der Gruppe und $s+1$ die Anzahl der Glieder einer Kompositionsreihe, so gilt $\kappa < 2^{2s-1} \sqrt{g}$.

A. Khintchine (Saratow).

Mengenlehre und reelle Funktionen.

Kuratowski, Casimir: Sur les ensembles projectifs. Rec. math. Moscou, N. s. 1, 713—714 (1936).

A family F of sets satisfies the first theorem of separation when for each pair A, B of disjoint sets of the family there is a set C which with its complements belongs to F and satisfies $A \subset C, CB = 0$. The second theorem of separation is satisfied if, without assuming that A and B are disjoint, there exist two disjoint sets C, D

of F whose complements belong to F such that $A - B \subset C$, $B - A \subset D$. The family of closed sets satisfies the second theorem without satisfying the first. The families of sets G_δ , $F_{\sigma\delta}$, etc., analytic sets (Lusin), projective sets of class $CPCA$ (Novikoff) satisfy both theorems of separation. The two theorems of separation are special cases of the following theorem: a family G of sets satisfies the theorem of reduction if for each pair X, Y of sets of G there is a pair of disjoint sets V, W of G such that $C \subset X$, $W \subset Y$ and $V + W = V + Y$. If a family G satisfies the theorem of reduction and F is the family of complements of the sets of G , the family F satisfies the two theorems of separation. The families of sets F_σ , $G_{\delta\sigma}$, CA , PCA , satisfy the theorem of reduction. They also satisfy the generalized theorem of reduction obtained by replacing the pair X, Y by an infinite sequence of sets. This generalized theorem includes all the theorems of reduction now known. The demonstration of this theorem introduces the concept of an analytic (projective) series of sets. Let C be a set of class CA of which no constituent C_α is null. A series of type Ω of sets $A_1, A_2, \dots, A_\alpha, \dots$ is analytic (projective) if there is on the plane an analytic (projective) set P such that for $x \in C_\alpha$, we have $A_\alpha = E_y(x, y) \in P$. E. W. Chittenden.

Novák, J.: Über den Charakter von Mengen. Čas. mat. fys. **66**, 206—209 (1937) [Tschechisch].

Ein System \mathfrak{S} bestehend aus Umgebungen einer Menge A in einem topologischen Raum nennt man vollständig, wenn jede Umgebung der Menge A eine Umgebung aus dem System \mathfrak{S} als Teilmenge enthält. Es gibt ein vollständiges System \mathfrak{S} mit der kleinsten Mächtigkeit. Diese Mächtigkeit heißt Charakter der Menge A . — In jedem metrisierbaren Raum P gilt folgender Satz: Der Charakter einer Menge $M \subset P$ ist dann und nur dann abzählbar, wenn die Menge M einen kompakten Rand hat. — Herr Prof. Čech hat folgende zwei Korollare bewiesen: Der Charakter jeder Teilmenge des Raumes P ist dann und nur dann abzählbar, wenn der Raum eine endliche Ableitung besitzt. — Der Charakter jeder abgeschlossenen Teilmenge des Raumes P ist dann und nur dann abzählbar, wenn der Raum P eine kompakte Ableitung hat. Autoreferat.

● **Vitali, G., e G. Sansone:** Moderna teoria delle funzioni di variabile reale. Pt. 2. (Consiglio naz. d. ricerca monogr. di mat. applicata.) Bologna: Nicola Zanichelli 1935. VI, 310 pag. rilegato L. 55.—.

The book is the second part of a monograph of which the first part appeared in 1935 (this Zbl. **13**, 250). Chapter 1 contains a rapid survey of general orthogonal expansion theory and first notions of the theory of Hilbert spaces. Elementary theory of trigonometric Fourier series with one paragraph given to (C. 1) summability and another to Fourier integral, is treated in Chapter 2. In Chapter 3 the author gives a rapid exposition of Legendre series, together with various expressions for Legendre polynomials, including asymptotic expressions. An analogous treatment of Laguerre and Hermite series is found in Chapter 4. The last Chapter 5 is devoted to the theory of Stieltjes integrals with applications to the theory of characteristic function and theory of probability. At the end of the book there is a list of references, where however various important papers immediately related to the topics treated in the book are not mentioned. J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

Agnew, Ralph Palmer: Generalizations of the Riemann-Lebesgue theorem. I. Tôhoku Math. J. **42**, 300—310 (1936).

A real measurable $\Phi(x)$ in $-\infty < x < \infty$ is called dispersed if the x -set for which $\Phi(x) = c$ has measure 0 for each constant c . The author discusses the transform

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iu\Phi(x)} dx$$

where $\Phi(x)$ is dispersed. The main result is that for $\varepsilon > 0$ there is an $M(\varepsilon)$ so that

$\int_B^{B+h} |F(u)| du < \varepsilon h + M(\varepsilon)$. In particular $|F(u)|$ is zero in the mean. These results

are then applied to Fourier-Stieltjes transforms of functions of bounded variation and yield a new approach to certain essentially known theorems. It may be mentioned that formula (6.15) and related questions are of an older date than indicated by the author's references [cf. Haviland, Amer. J. Math. 57, 569 (1935); this. Zbl. 13, 60].

R. Kershner (Baltimore).

Jeffery, R. L.: Functions defined by sequences of integrals and the inversion of approximate derived numbers. Trans. Amer. Math. Soc. 41, 171—192 (1937).

A function $f(x)$ is said to be integrable in the sequence sense to a continuous function $F(x)$ on an interval $I = [a, b]$ if there exists a sequence of summable func-

tions $\{s_n(x)\}$ such that $f(x) = \lim_n s_n(x)$ and $F(x) = \lim_n \int_a^x s_n(x) dx$ for $a \leq x \leq b$. If

moreover, there exists an ascending sequence of sets $\{E_n\}$ in I such that $I = \lim_n E_n$

and such that $s_n(x) = f(x)$ for $x \in E_n$ and $s_n(x) = 0$ elsewhere in I , then f is totally

integrable in the sequence sense to F on I . The author establishes, among others, the following theorems: 1. If a finite measurable function f is almost everywhere in

an interval $[a, b]$ an extreme approximate derivate of a continuous function F , then f is integrable in the sequence sense to $F(x) - F(a)$ (it seems that the theorem holds

if f is almost everywhere an arbitrary derivate number of F). 2. If f is integrable in the Denjoy sense on an interval $[a, b]$, then f is totally integrable in the sequence

sense to $\int_a^x f(t) dt$. — In connection with the problems of unicity for integration in

sequence, the last theorem is completed as follows: If a function f , integrable in the

Denjoy sense on an interval $[a, b]$, has the set of points of non-summability of measure

zero and is totally integrable in the sequence sense to a function F which is (A C G) on $[a, b]$, then the function F is an indefinite Denjoy integral of f . Saks (Warszawa).

Guareschi, Giacinto: La differenziazione totale e la determinazione dello spazio lineare di dimensione minima contenente l'insieme tangente in un punto della grafica di una funzioni di più variabili reali. Scritti mat. off. a Luigi Berzolari 131—144 (1936).

Die Arbeit knüpft an die in dies. Zbl. 8, 344 referierte Arbeit desselben Verf. an und dehnt (bei den dortigen Bezeichnungen) die Resultate auf den Fall aus, wo die Maximalzahl m linear unabhängiger Halbtangenten in A' an $I' \leq n$ ist. Wenn der kleinste alle Halbtangenten enthaltende lineare Raum L nicht zur z -Achse parallel ist, gibt es ∞^{n-m} einen linearen Raum ausmachende Zahlssysteme b_1, \dots, b_n (totale

Differentiale) derart, daß $z - f(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n b_i(x_i - a_i)$ die Gleichung einer Hyper-

ebene ist, die nicht parallel zur z -Achse ist und alle Halbtangenten an I' in A' enthält (und umgekehrt). Der Durchschnitt dieser Hyperebenen ist L . Er wird geometrisch und analytisch näher beschrieben.

H. Busemann (Princeton).

Ward, A. J.: On the derivation of additive functions of intervals in m -dimensional space. Fundam. Math. 28, 265—279 (1936).

Etant donnée une fonction additive d'intervalle F l'auteur désigne par $F^*(x)$ et $F_*(x)$ les dérivés extrêmes forts de F dans le point x , c.-à-d. les limites, supérieure et inférieure, du quotient $F(I)/\text{mes } I$ où I est un intervalle arbitraire contenant x de diamètre tendant vers 0. Lorsqu'en outre l'intervalle I est supposé ayant le paramètre de régularité supérieur ou égal à un nombre positif fixé α , les deux limites

d'indétermination du quotient envisagé sont désignées par $\overline{F}_{(\alpha)}(x)$ et $\underline{F}_{(\alpha)}(x)$ respective-

ment. On écrit ensuite $\overline{F}(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \overline{F}_{(\alpha)}(x)$ et $\underline{F}(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \underline{F}_{(\alpha)}(x)$, et si les nombres $\overline{F}(x)$

et $\underline{F}(x)$ sont égaux leur valeur commune est désignée par $F'(x)$ et dite dérivée (ordinaire)

de F dans le point x . — L'auteur démontre les théorèmes suivants, qui concernent

les fonctions additives d'intervalle arbitraires dans un espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions: 1. Si, pour une fonction F , on a $F_*(x) > -\infty$ dans chaque point x d'un ensemble A , la fonction F possède dans presque tous les points de A une dérivée (ordinaire) finie $F'(x) = F_*(x)$. 2. Si pour une fonction F et un nombre positif $\alpha < 1$, on a $F_{(\alpha)}(x) > -\infty$ dans chaque point x d'un ensemble B , la fonction F possède une dérivée (ordinaire) finie dans presque tous les points de B . — Le premier de ces théorèmes remarquables a été établi antérieurement pour les fonctions d'intervalle dans le plan [cf. A. J. Ward, *Fundam. Math.* **26**, 167—181 (1936), ce Zbl. **13**, 251, et A. S. Besicovitch, *Fundam. Math.* **25**, 209—216 (1935), ce Zbl. **12**, 58]. Il est curieux que sa démonstration pour les espaces à un nombre de dimensions $m \geq 3$ exige des méthodes bien plus délicates que dans le cas du plan. — L'étude du cas $\alpha = 1$ dans le théorème 2 reste encore ouvert. Toutefois, l'auteur a réussi à prouver que ce théorème reste encore valable pour $\alpha = 1$, lorsque F est une fonction additive et continue d'intervalle dans le plan. D'autre part, quelle que soit la fonction additive d'intervalle F dans un espace euclidien quelconque, l'ensemble des points x où soit $\underline{F}_{(1)}(x) = +\infty$, soit $\bar{F}_{(1)}(x) = -\infty$, est nécessairement de mesure nulle.

Saks (Warszawa).

Analysis.

De Finetti, B.: Problemi di „Optimum“. *Giorn. Ist. Ital. Attuari* **8**, 48—67 (1937).

Im q -dimensionalen Raume x_1, \dots, x_q seien $n \leq q$ Funktionen $\varphi_1(x_1, \dots, x_q), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_q)$ gegeben. Ein Punkt $x^{(0)}$ wird als optimal für die Funktionen φ_i bezeichnet, wenn folgendes stattfindet: Es gibt eine Umgebung U von $x^{(0)}$ derart, daß für jeden Punkt x aus U entweder wenigstens eine Funktion in x einen kleineren Wert als in $x^{(0)}$ hat, oder $\varphi_i(x) = \varphi_i(x^{(0)})$ ist für $i = 1, \dots, n$. Der Bereich dieser optimalen Punkte ist im allgemeinen $(n-1)$ -dimensional und ist in der Mannigfaltigkeit der Punkte enthalten, in denen die Funktionalmatrix $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}$ einen Rang kleiner als n hat.

Als weitere notwendige Bedingungen erster Ordnung ergeben sich gewisse Ungleichungen, die einen simplexartigen Teil dieser Mannigfaltigkeit abgrenzen. Dieser bildet, wenn gewisse (hier nicht behandelte) Bedingungen zweiter Ordnung erfüllt sind, den Bereich der optimalen Punkte. Er kann auch als die Menge der Maximumstellen der nichtnegativen Linearkombinationen

$$\sum_{i=1}^n \varrho_i \varphi_i(x_1, \dots, x_q), \quad \varrho_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n \varrho_i = 1,$$

der φ_i gewonnen werden. — Diese Verallgemeinerung des gewöhnlichen Maximumproblems ist durch Fragestellungen der theoretischen Nationalökonomie nahegelegt worden.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Bernstein, Serge: Sur les formules de quadrature de Cotes et Tchebycheff. *C. R. Acad. Sci. URSS*, N. s. **14**, 323—326 (1937).

1° Si $n \geq 10$ (et aussi pour $n = 8$), il y a certainement des coefficients négatifs C_i dans la formule de Cotes

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{i=0}^n C_i f\left(\frac{i}{n}\right).$$

2° Si $n \geq 10$ (et aussi pour $n = 8$), la formule de Tchebycheff

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

est inapplicable puisqu'il n'est pas possible de choisir les x_i réels et vérifiant l'inégalité $0 \leq x_i \leq 1$. (On sait bien que les deux formules en question doivent être exactes pour tous les polynomes de degré $\leq n$.)

W. Gontcharoff (Moskau).

Doole, H. P.: Integration of certain simple step functions. Amer. Math. Monthly 44, 222—227 (1937).

Arley, Niels: Über Summation einer Reihe. Mat. Tidsskr. B 1937, 42—44 [Dänisch].

Beweis der für eine physikalische Untersuchung benötigten Relation

$$\frac{1}{2^n n!} = \sum_l \frac{2^{2l+1}}{\sqrt{\pi}} (2l+1) \frac{\Gamma\left(\frac{n+l+3}{2}\right)}{\left(\frac{n-l}{2}\right)!} \left[\frac{\left(\frac{n+l}{2}\right)!}{(n+l+1)!} \right]^2,$$

wo $n \geq 0$ ganz ist und die Summation über alle nichtnegativen Zahlen $l = n, n-2, n-4, \dots$ zu erstrecken ist. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

Orlicz, W.: Über k -fach monotone Folgen. Studia Math. 6, 149—159 (1936).

A sequence $\{a_r\}$ is said to be of bounded variation of order k ($k = 1, 2, \dots$) if $\sum_{r=0}^{\infty} \binom{r+k-1}{k-1} |\Delta^k a_r| < \infty$, where $\Delta^k a_r = a_r - \binom{k}{1} a_{r+1} + \binom{k}{2} a_{r+2} - \dots + (-1)^k a_{r+k}$.

The sequence $\{a_r\}$ is said to be monotonically decreasing of order k , if $\Delta^i a_r \geq 0$ for $i = 1, 2, \dots, k$ and $r \geq 0$. Among others the following theorems are established. (1) A necessary and sufficient condition that the series $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_r x_r + \dots$ should be summable (C, l) ($l = 1, 2, \dots$) for every sequence $\{a_r\}$ tending to 0 and monotonically decreasing of order k is that the series $x_1 + x_2 + \dots + x_r + \dots$ should be bounded (C, m) , where $m = \min(l, k-1)$. (2) Let T be any Toeplitz method of summation satisfying the following condition: for every series $\sum \lambda_r$ summable T and every sequence $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_r \geq \dots \rightarrow 0$, the series $\sum a_r \lambda_r$ is also summable T . Then the method T is equivalent to ordinary convergence. Extensions to the case when the $\{a_r\}$ are monotonically decreasing of order k . Applications to orthogonal developments. *A. Zygmund* (Wilno).

Karamata, J.: Quelques moyens particuliers pour établir des théorèmes inverses des procédés de sommabilité. Rev. Ci., Lima 38, Nr 418, 155—160 (1936).

Wenn aus der Konvergenz des Integrals $\int_0^{\infty} u(t) dt = s$ die Beziehung: $\Phi(\sigma) \equiv \int_0^{\infty} \varphi(\sigma t) u(t) dt \rightarrow s$, falls $\sigma \rightarrow +0$ folgt, so heißt der Kern $\varphi(\sigma t)$ regulär. Allgemeine Bedingungen für die Umkehrung der Grenzwertbeziehung wurden von N. Wiener gegeben. Unter speziellen Voraussetzungen wird hier ein kurzer, einfacher Beweis des folgenden Umkehrsatzes gegeben: Aus $\Phi(\sigma) \rightarrow s$ für $\sigma \rightarrow 0$ und aus $u(t) = O\left(\frac{1}{t}\right)$ für $t \rightarrow \infty$ folgt die Konvergenz des Integrals $\int_0^{\infty} u(t) dt$ zu s . Die Voraussetzungen über den Kern sind hier: 1. die Kerne $\varphi^k(\sigma t)$, $k = 1, 2, 3, \dots$, sind regulär, 2. $\varphi(0) = 1$, 3. $\varphi(t)$ nichtwachsend, und 4. die Integrale $\int_0^1 \frac{1-\varphi(t)}{t} dt, \int_1^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt$ existieren. Hierin sind bekannte, wichtige Spezialfälle enthalten. *Otto Szász*.

Avakumović, Vojislav G.: Über Laplacesche Integrale, deren Wachstum von iteriertem Exponentialcharakter ist. Bull. Acad. Sci. Math. Nat., Belgrade Nr 3, 173—181 (1936).

Es wird zunächst der Satz Abelscher Art bewiesen: Es existiere das Integral $\int_0^{\infty} e^{-tx} A(t) dt$ für jedes $x > 0$; es bedeute $\lg_{n+1} u = \lg \lg_n u$, $\lg_1 u = \lg u$. Aus $\lg A(t) \sim t/\lg_n t$ für $t \rightarrow \infty$ folgt dann $\lg_{n+1} I(x) \equiv \lg_{n+1} (1/x \int_0^{\infty} e^{-tx} A(t) dt) \sim x$ für $x \rightarrow \infty$. Sodann wird der Umkehrsatz bewiesen: Ist $A(t) \geq 0$ und nicht abnehmend, so folgen aus $\lg_{n+1} I(x) \sim x$ ($x \rightarrow \infty$) die Abschätzungen

$$\partial \lg_n t \cdot e_n'(\partial \lg_n t) < \lg A(t) < \lambda t / \lg_n t.$$

Hier ist $1 > \vartheta(t) \rightarrow 1$, $1 < \lambda(t) \rightarrow 1$ für $t \rightarrow \infty$, und $e_1(x) = x$, $e_n(x) = e^{e_{n-1}(x)}$, $e'_n(x) = \frac{de_n(x)}{dx}$. Schließlich folgt eine Anwendung auf die *partitio numerorum*.

Otto Szász (Cincinnati).

Radó, Tibor: Solution of a problem of F. Riesz on the harmonic majorants of subharmonic functions. Duke math. J. 3, 123—132 (1937).

Soit G un domaine plan où u est sousharmonique (sens de F. Riesz) et G' un domaine de Dirichlet borné, complètement intérieur et de frontière B' . La meilleure majorante harmonique \bar{h} (sens de F. Riesz) de u dans G' est la limite (unique) de la solution du problème de Dirichlet dans G' pour toute suite de distributions continues sur B' tendant en décroissant vers u . L'auteur démontre, sans représentation potentielle et comme suit, l'identité de \bar{h} avec la plus petite majorante harmonique h^* de u dans G' : 1° En prolongeant par u dans $G - G'$ les fonctions \bar{h} et h^* prises dans G' , on obtient des fcts s.h. dans G (conséquence facile des définitions). 2° Si u est harmonique dans G' , il y coïncide avec \bar{h} (usage d'une formule de Green transformée et de la suite d'approximation d'une fct s.h., obtenue par 3 médiations spatiales consécutives avec cercles de même rayon $1/n$, suite de fonctions dont, d'après F. Riesz, le laplacien a sur tout ensemble fermé intérieur une intégrale double bornée quand $n \rightarrow +\infty$). D'où aisément l'identité annoncée et la propriété que \bar{h} est aussi la seule fct harmonique dans G' telle qu'en prolongeant par u dans $G - G'$, on obtienne une fct s.h. dans tout G .

Brelot (Alger).

Spezielle Funktionen:

● **Weyrich, Rudolf:** Die Zylinderfunktionen und ihre Anwendungen. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1937. IV, 137 S. u. 8 Abb. geb. RM. 7.60.

Verf. geht von der zweidimensionalen Wellengleichung in rechtwinkligen Koordinaten aus und zeigt kurz die Integration dieser Wellengleichung mittels ebener und mittels Kugelwellen. Bei letzterer Lösung zeigt er, wie durch Differentiation der einfachen Kugelwelle nach verschiedenen Richtungen die Strahlung mehrfacher Pole erhalten werden kann. Das Überlagerungsprinzip wird dazu benutzt, Kugelwellen durch Überlagerung (Integration) über alle möglichen ebenen Wellenrichtungen darzustellen. Dieses Prinzip wird nun auf die Strahlung eines Linienstrahlers von unendlicher Länge angewandt, wobei Zylinderwellen entstehen. Hieraus erhält Verf. direkt Definitionen der Hankelschen Funktionen erster und zweiter Art nullter Ordnung als komplexe Integrale über ebene Wellen. Durch mehrfache Differentiation unter dem Integralzeichen gelingt es, in einfacher Weise diese Definition auf Hankelsche Funktionen beider Arten jeder beliebigen ganzzahligen Ordnung zu erweitern, ganz analog zur obengenannten Erzeugung der Strahlung von Mehrfachpolen. Indem man die genannten Differentialoperatoren durch ihre konjugiert-komplexen Werte ergänzt, entsteht die Sommerfeldsche Integraldarstellung der Besselschen Funktionen erster Art beliebiger ganzzahliger Ordnung. Die Neumannsche Funktion kann aus den erwähnten Funktionen sofort erhalten werden. Die Besselsche Differentialgleichung wird aus der Wellengleichung direkt abgeleitet. Das Verhalten der Zylinderfunktionen für beliebiges komplexes Argument wird durch funktionentheoretische Betrachtung der Sommerfeldschen Integrale erschlossen. Hier können auch Funktionen beliebiger nicht ganzzahliger (auch komplexer) Ordnung in einfacher Weise betrachtet werden. Bei der Behandlung der asymptotischen Entwicklungen der Besselschen Funktionen geht Verf. vom Watsonschen Fundamentalsatz über komplexe Integrale aus. Hieraus leitet er die Hankelschen asymptotischen Reihen ab. Die Debyesche Sattelpunktmethode wird ausführlich behandelt. Aus dem Airyschen Integral werden die asymptotischen Formeln von Nicholson und Watson abgeleitet. Aus Integraldarstellungen vom Poissonschen Typus werden schärfere Restabschätzungen bei den Hankelschen asymptotischen Reihen abgeleitet. Die Funktionalgleichungen der Zylinderfunktionen werden direkt aus den Sommerfeldschen Integraldarstellungen abgeleitet. Es folgt

eine Diskussion der Nullstellen Besselscher Funktionen, eine Zusammenstellung der unbestimmten und bestimmten Integrale mit Zylinderfunktionen, eine Darstellung der Lommelschen Transformationen der Besselschen Differentialgleichung, eine Ableitung der Additions- und Multiplikationstheoreme der Zylinderfunktionen mittels einer Darstellung von ebenen und Zylinderwellen mit beliebiger Achse mit Hilfe von Besselschen Funktionen. Die Darstellung beliebiger Funktionen durch Summen und Integrale mit Zylinderfunktionen (Randwertaufgaben) wird ausführlich behandelt. Hierauf folgen Anwendungen: Transversalschwingungen eines frei herabhängenden Seiles, freie Schwingungen einer kreisförmigen Membran, Skineffekt in runden Drähten, Beugung einer ebenen Welle an einem Zylinder, Wärmeleitung im Zylinder und Bestimmung der Knicklänge einer der Schwerkraft unterworfenen vertikalen Säule. *M. J. O. Strutt.*

Sharma, J. L.: An integral equation satisfied by the Lamé's functions. *J. Math. pures appl.*, IX. s. 16, 199—203 (1937).

Verf. beweist, daß alle Laméschen Potentialfunktionen erster Art einer linearen homogenen Integralgleichung genügen, wobei im Kern nur Weierstraßsche elliptische Funktionen und Ableitungen derselben vorkommen. Beim Beweis drückt Verf. zunächst alle Laméschen Potentialfunktionen erster Art der vier Typen durch Weierstraßsche elliptische Funktionen aus. Sodann zeigt er, daß der Kern obiger Integralgleichung durch einen Differentialoperator zweiter Ordnung, welcher der Differentialgleichung der Laméschen Potentialfunktionen in der Weierstraßschen Form entspricht, zum Verschwinden gebracht werden kann. Hieraus folgt die Integralgleichung fast unmittelbar.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

MacRobert, T. M.: Some formulae for the associated Legendre functions of the second kind; with corresponding formulae for the Bessel functions. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* 57, 19—25 (1937).

Methods are first given for summing the Fourier cosine series in which the Fourier constant a_n is the associated Legendre function

$$Q_{n-\frac{1}{2}}^m(ch\,x) = L(m, n, x)$$

say, for the case in which $R(m) > -\frac{1}{2}$, $x > 0$ and expressions are found for the Fourier integrals

$$\int_0^\infty \cos(un) L(m, n, x) \, dn$$

$$\int_0^\infty \sin(un) L(m, n, x) \, dn$$

and for similar integrals with $J_n(x)$ and $I_n(x)$ in place of $L(m, n, x)$. Whipple's expression for $L(m, n, x)$ for the case $R(m+n) > -\frac{1}{2}$ is obtained by contour integration.

The trigonometrical series $\sum_{n=0}^\infty c_s \cos(su)$, $\sum_{n=0}^\infty c_s \sin(su)$ $s = n + a + \frac{1}{2}$

in which c_s has successively the forms $L(m, s, x)$, $J_s(x)$, $I_s(x)$ are expressed by means of definite integrals.

H. Bateman (Pasadena).

Erdélyi, Artur: Über gewisse Funktionalbeziehungen. *Mh. Math. Phys.* 45, 251—279 (1937).

A discussion is given here of the function

$$j_{\mu, \nu}(s) = \int_a^b J_\nu(2\sqrt{st}) t^\mu F(t) \, dt,$$

where $F(t)$ is a general function. Recurrence formulae and expansions are obtained. These are followed by a multiplication theorem, integral formulae, and integral representations. Several particular cases are considered. Thus, for $F(t) = (t^2 + t)^{-\frac{1}{2}}$, $a = 0$, $b = \infty$, $j_{0, \nu}(s)$ reduces to $2I_{\frac{1}{2}, \nu}(\sqrt{s})K_{\frac{1}{2}, \nu}(\sqrt{s})$. In other cases $j_{\mu, \nu}(s)$ reduces to the confluent hypergeometric function and the associated Legendre function $P_n^m(\cos \theta)$.

Examples of particular results obtained are

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{s^r}{r!} \frac{L_n^{(r)}(s)}{2n+r+1} = \frac{(2n)!}{n!} \sqrt{\pi} s^{-n-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}s} I_{n+\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}s),$$

where $L_n^{(r)}(s)$ is the generalised Laguerre polynomial, and

$$P_n^m \left(\frac{1}{\sqrt{1+4s}} \right) = \frac{2^{n-m}}{\Gamma(1-m+n)} s^{\frac{1}{2}m} (1+4s)^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}} \frac{d^n}{ds^n} \left(\frac{s^{n-m}}{\sqrt{1+4s}} \right),$$

where n is a positive integer.

W. N. Bailey (Manchester).

Nichols, G. D.: A generalized element of decomposition for doubly periodic functions. Bull. Amer. Math. Soc. **43**, 249—252 (1937).

Ist ein Quotient aus elliptischen Thetafunktionen nicht ganz, so kann er wie jede meromorphe Funktion einer Veränderlichen dargestellt werden als Teilbruchreihe. Indem man die rationalen Elemente dieser Doppelsomme etwa zeilenweise zusammenfaßt, bleibt eine einfach erstreckte Reihe, deren Glieder aus Kotangenten und deren Ableitungen in endlicher Anzahl zusammengesetzt sind.

Wilhelm Maier.

Differentialgleichungen, allgemeine Theorie:

Lauritzen, Svend: Neue Bemerkungen über Differentialgleichungen $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. Mat. Tidsskr. B **1937**, 104—108 [Dänisch].

Neuer Beweis des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes unter der üblichen Voraussetzung einer (ungleichmäßigen) Lipschitzbedingung. Man geht von einer bestimmten Menge M_1 des Funktionenraumes aus und zeigt, daß sie durch $\int_{x_0}^x f(t, y) dt + y_0$ auf

$M_2 \subset M_1$ abgebildet wird; daher geht M_2 über in $M_3 \subset M_2$ usf., und es bleibt nur zu zeigen, daß sich $\{M_n\}$ auf einen Punkt zusammenzieht.

W. Feller (Stockholm).

Petrovitch, Michel: Sur une classe d'équations différentielles du premier ordre. Bull. Acad. Sci. Math. Nat., Belgrade Nr **3**, 1—5 (1936).

On étudie l'équation $y' = P(x, y)$ qui possède comme intégrale particulière la fonction $u = -P_{m-1}(x, 0) : P_m(x, 0)$, P étant un polynôme en y du degré m et P_k la k -ième dérivée partielle par rapport à y . On établit les conditions pour que cette équation s'intègre par quadratures ou pour que l'intégrale y soit algébrique.

Janczewski (Leningrad).

Petrovitch, Michel: Équations différentielles indéterminées. Bull. Acad. Sci. Math. Nat., Belgrade Nr **3**, 183—188 (1936).

On donne quelques conditions pour que l'équation $F(z, u, u', \dots, u^{(p)}, v, v', \dots, v^{(q)}) = 0$ cesse d'être indéterminée, par ex.: u doit appartenir à un ensemble (U) de fonctions à coefficients tayloriens positifs ne surpassant pas un nombre donné.

M. Janczewski.

Iglisch, Rudolf: Verzweigung periodischer Lösungen nichtlinearer Schwingungsgleichungen. Math. Ann. **114**, 194—226 (1937).

Es werden die mit P periodischen Lösungen (p. L.) der Gleichung (*) $\ddot{y} + f(y) = g(t) + \beta G(t)$, $g(t+P) = g(t)$, $G(t+P) = G(t)$, für kleine Werte des Parameters β gesucht, die zu einer bekannten p. L. $y = x(t)$ von (*) mit $\beta = 0$ benachbart sind; $f(y)$ wird nicht analytisch, sondern genügend oft differentiierbar vorausgesetzt. 1. Hat die Gleichung (**) $\ddot{\varphi} + f'(x(t))\varphi = 0$ keine p. L., so besitzt (*) genau eine p. L. (Nichtresonanzfall). 2. Wenn (**) genau eine p. L. $\varphi_1(t)$ besitzt (Resonanzlösung),

so führt der Verf. zwei Größen ein: $B = \int_0^P G(t) \varphi_1(t) dt$ und $L_2 = \frac{1}{2} \int_0^P f''(x(t)) \varphi_1^3 dt$;

ist $B \neq 0$, $L_2 \neq 0$, so hat (*) zwei oder keine p. L., je nachdem ob $\text{sign } \beta B = \text{sign } L_2$ ist oder nicht; ist $L_2 = 0$ mit $B \neq 0$, so werden neue Größen L_3, L_4, \dots eingeführt; (*) besitzt eine bzw. zwei oder keine p. L., je nachdem ob der Index n des ersten nichtverschwindenden L_n ungerade bzw. gerade ausfällt. Diskussion des Falles $B = 0$,

$L_2 \neq 0$. 3. (**) hat zwei unabhängige p. L. φ_1, φ_2 (orthonormal vorausgesetzt), die nicht beide zu G orthogonal sind; dann hat (*) entweder keine oder zwei oder vier p. L., von eventuellen Fällen höherer Verzweigungen abgesehen. 4. Die Analyse der Gleichung $\ddot{y} + f(y, \dot{y}) = g(t) + \beta G(t)$ wird skizziert. Die Beweismethode — Anwendung der Sturm-Liouvilleschen Theorie und Stetigkeitsbetrachtungen. *W. Stepanoff.*

Chern, Shiing-shen: Sur la géométrie d'une équation différentielle du troisième ordre. *C. R. Acad. Sci., Paris* **204**, 1227—1229 (1937).

Par rapport au groupe de transformations de contact du plan l'équation différentielle du troisième ordre $y''' = F(x, y, y', y'')$ (I) admet un invariant relatif I ayant la signification suivante: Pour que la condition de contact de deux courbes intégrales infiniment voisines de l'équation (I) soit donnée par une équation de Monge du second ordre il faut et il suffit qu'on ait $I = 0$. *O. Borůvka (Brno).*

Neumer, Walter: Die gewöhnlichen Differentialgleichungen dritter und vierter Ordnung, die lineare homogene Form erhalten können. I. *J. reine angew. Math.* **176**, 224—249 (1937).

Let F_n denote the totality of ordinary differential equations of the n -th order in the single unknown y and the independent variable x ; let L_n be the subset of F_n whose equations are linear and H_n the subset of L_n whose equations are homogeneous; let f_n, l_n, h_n be members of F_n, L_n, H_n , respectively; and let T denote a point transformation on (x, y) . The author first shows (I) if two members of L_n ($n > 2$) are equivalent under T , then T has the form

$$\bar{x} = a(x), \quad \bar{y} = b(x)y + c(x); \quad (1)$$

(II) the totality of transformations of this form for arbitrary a, b, c leaves L_n invariant; (III) a transformation T of the form (1) carries an h_n into an \bar{h}_n if and only if $c(x)$ is a solution of h_n . Further if $a = 1$, if b is constant and if c is a general solution of h_n , formulas (1) give an $(n+1)$ -parameter group G_{n+1} leaving h_n invariant. Any f_n equivalent under a T to an h_n will have a group G_{n+1} , which arises from G_{n+1} by the change of variables T^{-1} . This group is studied at length. The results are finally applied to determine the most general equation of the third order equivalent to an h_3 .

J. M. Thomas (Durham).

Neumer, Walter: Die gewöhnlichen Differentialgleichungen dritter und vierter Ordnung, die lineare homogene Form erhalten können. II. *J. reine angew. Math.* **177**, 13—36 (1937).

This paper develops for contact transformations a technique similar to that previously published in Part I (see the prec. rev.) for point transformations. In particular, it determines the general form of equations equivalent under contact transformations to linear homogeneous equations and the groups under which these equations are invariant.

J. M. Thomas (Durham).

Inzinger, Rudolf: Zur Differentialgeometrie Pfaffscher Mannigfaltigkeiten. *Mh. Math. Phys.* **45**, 214—236 (1937).

In der vorliegenden Arbeit wird die euklidische Differentialgeometrie und insbesondere die Krümmungstheorie der Integralstreifen einer Pfaffschen Gleichung $u(x, y, z) dx + v(x, y, z) dy + w(x, y, z) dz = 0$ (1) entwickelt. Gegenüber anderen diesbezüglichen Arbeiten (vgl. z. B. dies. Zbl. **4**, 418, Sincov) sind die Untersuchungen des Verf. um so breiter angelegt, als neben den Integralkurven $k: x(t), y(t), z(t)$ der Gleichung (1) auch die durch die Ebenen $u[x(t), y(t), z(t)], v[\dots], w[\dots]$ erzeugten Torsen κ betrachtet werden und demzufolge der Begriff des Integralstreifens (k, κ) der Theorie zugrunde gelegt wird. Neben vielen bekannten Ergebnissen über die Punkte der Integralstreifen enthält diese Theorie auch stets deren Gegenstücke, die sich auf Ebenenorte beziehen.

O. Borůvka (Brno).

Herrmann, Aloys: Sur l'espace quasi-euclidien de M. Pierre Humbert. *Enseignement Math.* **36**, 63—68 (1937).

In der Theorie der Differentialgleichung $\Delta_3 u = 0$ bzw. in der mit ihr verknüpften

Geometrie des Linienelements $ds^3 = dx^3 + dy^3 + dz^3 - 3 dx dy dz$ treten die Appelschen Funktionen als eine Art Richtungsgrößen auf (vgl. Arbeiten von Devisme, insbesondere dies. Zbl. 5, 162; 6, 18; 9, 168). Verf. gibt eine geometrische Interpretation dieser Größen, die auf einer Rechnung mit hyperkomplexen Matrixgrößen beruht.

W. Feller (Stockholm).

Sakurai, Tokio: On the boundary value problems of certain type of linear partial differential equation. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 19, 215—240 (1937).

Die vom Verf. früher (s. dies. Zbl. 14, 307) dargestellte Methode wird auf ähnliche Randwertaufgaben für die Differentialgleichung

$$p_0(x) \frac{\partial^{n+m} u}{\partial x^{n+m}} + \dots + p_{n+m}(x) u + \frac{\partial^m}{\partial x^m} \left\{ q_0(y) \frac{\partial^r u}{\partial y^r} + \dots + q_r(y) u \right\} = 0$$

angewendet. Dabei wird gegenüber dem a. a. O. behandelten Fall ($m = 0$ und konstante Koeffizienten) neu eine genaue Untersuchung des asymptotischen Verhaltens der Lösungen der zugehörigen gewöhnlichen Differentialgleichungen für große Werte des in ihnen enthaltenen Parameters λ notwendig. Hellinger (Frankfurt a. M.).

Differential- und Integralgleichungen der mathematischen Physik, Potentialtheorie:

Gunter, N.: Sur la propagation des ondes sphériques dans les gaz. Trans. Leningrad Industr. Inst., Sect.: Phys. a. Math. Nr 10, 17—28 u. franz. Zusammenfassung 28—29 (1936) [Russisch].

Il s'agit de déterminer le mouvement d'un gaz entourant une sphère dont le rayon se change suivant la loi: $R = A + \vartheta(t)$, $\vartheta(0) = 0$, $\vartheta'(0) = 0$. On néglige la pesanteur du gaz et on choisit la loi de Poisson pour lier la pression avec la densité. L'auteur obtient ici une équation appartenant à la classe qu'il a étudiée dans un mémoire précédent [Rec. math. Moscou 32, 26 (1926)]. Il peut construire ainsi la solution du problème sous forme d'une série de puissances. Cette série peut être prolongée dans l'espace extérieur mais la distance du centre de la sphère ne peut pas dépasser un certain nombre. Il doit se manifester ici un phénomène qui est analogue au phénomène de Riemann-Hugoniot dans la théorie du mouvement rectiligne.

Janczewski (Leningrad).

Maggi, G. A.: Notevole complemento delle condizioni del Love e sue applicazioni. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 24, 246—249 (1936).

For previous and relevant work see this Zbl. 14, 90, 186, 378. Here, two examples of the applications of Love's conditions to harmonic oscillations and Hertzian oscillators are discussed which generalise conditions due to Sona (this Zbl. 12, 187; 13, 377) and lead to the general form of the reflected and refracted waves produced when a harmonic wave strikes a plane surface.

M. Slow-Taylor (Bucks).

Niessen, K. F.: Über die Wirkung eines vertikalen Dipolenders auf ebener Erde in einem Entfernungsbereich von der Ordnung einer Wellenlänge. Ann. Physik, V. F. 28, 209—224 (1937).

For previous work see this Zbl. 11, 90; 12, 381; 13, 377. Here, similar methods are used to discuss the formula for the Hertzian potential of a vertical dipole on a plane earth, already obtained, for the case of a complex numerical distance. The correction term is evaluated; the field-strength formulae applicable to measurement by the magnetic component and by the vertical and horizontal electrical components are deduced. Formulae are found for numerical computation in the case when the modulus of the numerical distance is small.

M. Slow-Taylor (Bucks).

Mercier, André: Sur l'équation $\nabla \rightarrow C = \alpha C$. C. R. Acad. Sci., Paris 204, 1148—1150 (1937).

Fortsetzung einer früheren Arbeit (C. R. Acad. Sci., Paris 201; dies. Zbl. 13, 3). Es werden besondere Lösungen der im Titel genannten Differentialgleichung gebildet.

van der Waerden (Leipzig).

Integralgleichungen, Integraltransformationen:

Tautz, Georg: Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen. I. Math. Z. 42, 430—472 (1937).

The author is concerned with the problem of existence of bounded solutions of the homogeneous singular integral equation (*) $\varphi(x) - \lambda \int_A^\infty K(x, y) \varphi(y) dy = 0$ ($A \geq -\infty$; only the case $A > -\infty$ is treated in detail) when λ is a point of the continuous spectrum of the equation. It is assumed that $K(x, y) = K_0(x - y)(1 + \eta(x, y))$, $K_0(t) = e^{-a|t|}u(t)$, where the functions $u(t)$ and $\eta(x, y)$ are subject to various restrictions which cannot be formulated here for lack of space. By normalizing K it is possible to reduce the continuous spectrum of (*) to the interval $(1, \infty)$. It is shown that for $\lambda > 1$ there exists at least one bounded non-trivial solution of (*), which asymptotically behaves like a solution of (*) with K replaced by K_0 . The case $\lambda = 1$ is also discussed under further restrictive assumptions. The discussion is based on an existence theorem

for the non-homogeneous equation $\psi(x) - \lambda \int_{-\infty}^\infty K_0(x - y) \psi(y) dy = f(x)$ where $f(x) \in L^2(-\infty, \infty)$. At the end of the paper an application is shown to the problem of determination of a harmonic function $U(\sigma, t)$ which is regular in $0 < \sigma < 1$ and satisfies the boundary conditions $U(0, t) = 0$, $\frac{\partial U}{\partial \sigma} - k(t)u|_{\sigma=1} = 0$, $k(t) \geq 0$.

J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

Giraud, Georges: Équations et systèmes d'équations où figurent des valeurs principales d'intégrales. C. R. Acad. Sci., Paris 204, 628—630 (1937).

Es werden Systeme von p linearen Integralgleichungen für p unbekannte Funktionen der Form

$$\sum_{\beta} \left[g_{\alpha\beta}(X) u_{\beta}(X) - \lambda \int_V^{(m)} G_{\alpha\beta}(X, A) u_{\beta}(A) d\tau_A \right] = f_{\alpha}(X); \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, p \quad (1)$$

behandelt. Die Integrationsmannigfaltigkeit V ist m -dimensional und das Integral wird als Cauchyscher Hauptwert verstanden. Im Anschluß an frühere Untersuchungen (Giraud, dies. Zbl. 14, 309; Michlin, 14, 66 u. 16, 29) wird eine Methode entwickelt, die es erlaubt, die Integralgleichungen (1) auf solche zurückzuführen, welche der Fredholm'schen Theorie zugänglich sind. Es wird eine quadratische Matrix $TG(X, Y; \lambda)$ eingeführt, wo X zu V gehört, Y ein Punkt der Mannigfaltigkeit $y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_m^2 = 1$ und λ eine komplexe Zahl ist. Die Möglichkeit der erwähnten Zurückführbarkeit wird für die Punktmenge E solcher λ untersucht, für welche die Determinante der Matrix TG in X, Y nicht verschwindet. Ist D eine Komponente von E , so gelten in D für (1) die Fredholm'schen Sätze unter gewissen Zusatzbedingungen bei $m \geq 3$, falls D den Nullpunkt enthält. Es ist aber auch möglich, daß für jeden Punkt von D Nulllösungen von (1) vorhanden sind. Die Differenz der Anzahlen der unabhängigen Lösungen der homogenen Gleichung für (1) und ihrer assoziierten Gleichung ist in D konstant, kann aber von Null verschieden sein. Jedenfalls ist (1) für solche Systeme f_{α} lösbar, die zu den Nulllösungen der assoziierten Gleichung orthogonal sind. Schauder (Lwów).

Funktionalanalysis, Funktionalräume:

Delsarte, Jean: Sur une généralisation de la formule d'Euler-MacLaurin. C. R. Acad. Sci., Paris 204, 648—650 (1937).

The generalisation of the Euler-MacLaurin formula is accomplished by assuming an operator Δ_x permutable with the transposed operator of $T^y = \sum_0^\infty \varphi_n(y) \mathfrak{D}^{(n)}$, in the notations and definitions of a previous paper (see this Zbl. 16, 56). Then $\Delta_x(f(\xi)) = \alpha[T_x^{\xi}f(\eta)]$, where α is a linear functional and so $\Delta_x[j_{\lambda}(x)] = A(\lambda) \cdot j_{\lambda}(x)$, where

$A(\lambda) = \alpha[j_\lambda(\xi)]$, and $j_\lambda(x)$ are the characteristic functions of the operation \mathfrak{D} . This permits of the definition of Bernoullian functions via the expansion:

$$\frac{j_\lambda(x)}{A(\lambda)} = \mathfrak{B}_0(x) + \lambda \mathfrak{B}_1(x) + \dots + \lambda^n \mathfrak{B}_n(x) \dots$$

where $\Delta_x(\mathfrak{B}_n(\xi)) = \varphi_n(x)$, $\mathfrak{D}_x \mathfrak{B}_n(\xi) = \mathfrak{B}_{n-1}(x)$, $\mathfrak{D}_x(\mathfrak{B}_0(\xi)) = 0$, and an analogue of the Euler-MacLaurin formula for $T_x^y(f(\xi))$ in terms of \mathfrak{B}_n , Δ_x , \mathfrak{D}^p , and \mathfrak{F}_{xy} .

Hildebrandt (Ann Arbor).

Izumi, Shin-ichi: On the bilinear functionals. Tôhoku Math. J. **42**, 195—209 (1936).

The author demonstrates a series of theorems of the following type: if $A(f, g)$ is a limited bilinear operation on L in f and $L^p(p > 1)$ in g for the unit interval, then there exists a function $\psi(t, u)$ such that $A(f, g) = \int_0^1 f(t) dt \int_0^1 \psi(t, u) g(u) du$, $\psi(t, u)$ being of $L^{p'}$ in u for all t of a set of measure 1, and such that $\|\psi(t, u)\|_u$ belongs in t to the class M of essentially bounded functions. Further $\|A\| \leq \text{ess. l. u. b.}_{0 \leq t \leq 1} \|F(t, u)\|_u$.

Other cases considered are the combinations (L^p, L^q) , (M, M) , and (C, C) (C = class of continuous functions), the theorems in these cases requiring some modification to bring them into agreement with the results of Radon [S. B. Akad. Wiss. Wien **122**, IIa, 1384 (1913)], Frechét [Trans. Amer. Math. Soc. **16**, 222 (1915)] and Dunford (this Zbl. **15**, 305). The last section is concerned with generalisations of the Parseval theorem of the type: The relation $\lim_n \int_0^1 \int_0^1 f(t) g(s) \psi_n(t, s) ds dt = \int_0^1 f(t) g(t) dt$ holds for all functions f of L and g of M provided $\lim_n \int_0^1 \int_0^1 \psi_n(s, t) ds dt = \text{meas}(I_1 \cdot I_2)$ for all intervals I_1 and I_2 of $(0, 1)$ and $\text{ess. l. u. b.}_{0 \leq s, t \leq 1} |\psi_n(s, t)| \leq M$ for all n . Hildebrandt.

Funktionentheorie:

Faber, Karl: Deutung einer analytischen Funktion als Elementverein. Deutsche Math. **2**, 90—96 (1937).

Es werden Beziehungen zwischen einer analytischen Funktion $f(z) = iF'_x(x, y) + F'_y(x, y)$ einer komplexen Veränderlichen $z = x + iy$ und der zugehörigen Potentialfunktion $F(x, y)$ untersucht. Z. B. wird die Formel $|f'(z)| = \sqrt{-\kappa} \cdot \cos^2 \nu$ aufgestellt, wobei κ das Gaußsche Krümmungsmaß der Fläche $\mathfrak{z} = F(x, y)$ und ν den Neigungswinkel ihrer Berührungsebene gegen die z -Ebene bedeutet. O. Borůvka (Brno).

Pompeiu, D.: Sur quelques applications de la propriété du module d'une fonction holomorphe. Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest **7**, 22—23 (1937).

L'auteur montre que la proposition classique sur la non existence d'une fonction entière doublement périodique, qui se déduit en général du théorème de Liouville, peut être établie en utilisant la propriété du module d'une fonction holomorphe: $f(z)$ étant hol. autour de z_0 et non constante, $f(z_0) \neq 0$, il existe dans tout voisinage de z_0 des points en lesquels $|f(z)| > |f(z_0)|$, des points en lesquels $|f(z)| < |f(z_0)|$; propriété qui entraîne le théorème de Cauchy: le maximum du module de $f(z)$ dans une région fermée est atteint en un point de la frontière. L'auteur remarque en outre que le théorème en question est contenu dans celui-ci, dont la démonstration est aussi immédiate: Supposons que $f(z)$ soit holomorphe et non constante dans un domaine D et que l'on puisse partager D en un nombre fini de domaines D_k homologues (c'est-à-dire tels que toute valeur prise dans l'un soit aussi prise dans les autres), alors aucun D_k ne peut être complètement intérieur à D . [Note du Réf. On peut généraliser aisément. Soit $Z = f(z)$ une fonction quelconque, finie, continue dans un domaine D , telle que Z couvre tout un voisinage circulaire de $f(z_0)$ lorsque z décrit le voisinage de z_0 (transformations intérieures de Stoilow (voir par exemple ce Zbl. **4**, 260); le théorème de Cauchy subsiste. Donc, il ne peut exister de domaine D' complètement

intérieur à D tel que $f(z)$ prenne dans D' et sur sa frontière toutes les valeurs qu'elle prend dans D .] G. Valiron (Paris).

Biggeri, Carlos: Un théorème sur les singularités des fonctions analytiques. C. R. Acad. Sci., Paris **204**, 1159—1161 (1937).

L'auteur démontre une proposition fournissant une condition suffisante pour qu'un point du cercle de convergence d'une série entière, de rayon de convergence fini, soit un point singulier de la fonction définie par la série. Son énoncé est contenu dans le théorème classique de Fabry, pris sous l'une de ses formes complètes [Fabry, Ann. École norm. **13**, 379—380 (1896)]. L'auteur annonce que son résultat s'étend aux séries générales de Dirichlet. G. Valiron (Paris).

Okamura, Hiroshi: Sur la croissance des séries entières. Mem. Coll. Sci. Kyoto A **19**, 253—269 (1936).

$f(z)$ étant une série entière de rayon de convergence R , $R \leq \infty$, l'aut. étudie les relations entre les propriétés de la suite $|a_n|$ des modules des coefficients de $f(z)$ (a_n coefficient de z^n), et la croissance de $M(r)$, maximum de $f(z)$ pour $|z| = r$. Il emploie l'inégalité de Borel

$$m(r) \leq M(r) \leq m(r') \frac{r'}{r-r}; \quad m(r) = \max. \text{ de } |a_n| r^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

et compare $m(e^x)$ à $e^{g(x)}$, $g(x)$ étant une fonction continue dérivable pour $X_0 < x < \log R$, $g'(x)$ continue, croissante, et $\lim_{x=R} g'(x) = \infty$. Il introduit la fonction inverse, $x = h(y)$, de $y = g'(x)$, $k(y) = \int h(y) dy$ et

$$\kappa(\alpha, \beta) = \frac{\alpha\beta}{\beta - \alpha} \int_{\frac{1}{\beta}}^{\frac{1}{\alpha}} g \left[h \left(\frac{1}{t} \right) \right] dt - g \left[\frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} h(t) dt \right], \quad g'(x_0) < \alpha < \beta,$$

et donne des résultats généraux dont le plus simple est le suivant: Si le rang du terme maximum $m(r)$ ne reste pas borné, pour que $m(e^x) e^{-g(x)}$ tende vers 1, il faut et il suffit que $\lim_{n=\infty} |a_n| e^{k(n)} = 1$ et qu'il existe une suite de valeurs n_p de n telles que

$$\lim_{p=\infty} |a_{n_p}| e^{k(n_p)} = 1, \quad \lim_{p=\infty} \kappa(n_p, n_{p+1}) = 1.$$

Les formules générales obtenues permettent à l'auteur de retrouver et compléter les résultats anciens de Lindelöf et Valiron et les propositions récentes de Fujiwara, Beuermann et Hiong (voir ce Zbl. **5**, 67; **1**, 23; **8**, 364). G. Valiron (Paris).

Radojčić, Miloš: Domaines fondamentaux et valeurs exceptionnelles des fonctions analytiques aux environs des singularités essentielles. Bull. Acad. Sci. Math. Nat., Belgrade Nr **3**, 21—25 (1936).

L'auteur appelle domaines fondamentaux d'une fonction analytique $Z = f(z)$, les domaines du plan des z correspondant à la division en feuillets de la surface de Riemann décrite par $Z = f(z)$, la surface étant entière ou réduite à la portion Δ correspondant à un voisinage D d'une singularité S isolée ou non (voir ce Zbl. **14**, 119, ou C. R. Acad. Sci., Paris **190**, 356, et comparer à la Thèse d'Iversen. Helsingfors 1914). On suppose D divisé en domaines fondamentaux à frontières continues, formant des suites compactes dont les points limites sont tous les points de S . Un point de la frontière d'un domaine fondamental est un sommet si tout voisinage de ce point contient un point d'un autre domaine fondamental; les sommets divisent la frontière en côtés formant aux sommets des angles. Les angles successifs de même sommet forment un faisceau. Sommets, angles, faisceaux, sont dits algébriques ou transcendants suivant la nature du sommet. D est de première espèce lorsque tous les domaines fondamentaux, sauf un nombre fini, ont des sommets transcendants sur S . — Dans ce mémoire, l'aut. étudie le cas des fonctions admettant $p \geq 1$ valeurs exceptionnelles dans D . Il montre que, à chaque point transcendant de Δ correspond un faisceau transcendant, que D est de première

espèce, chaque domaine fond. sauf un nombre fini, ayant p sommets transcendants au moins. Pour $p > 1$, il étudie la position relative des faisceaux transcendants et les relations entre le nombre de ces faisceaux et des faisceaux algébriques. *G. Valiron.*

Radojčić, M.: Sur l'allure des fonctions analytiques au voisinage des singularités essentielles. Bull. Soc. Math. France **64**, 137—146 (1936).

La terminologie est celle des mémoires précédents de l'auteur (voir la ref. préc.). L'aut. donne des propositions telles que celles-ci: Si chaque domaine fondamental (excepté peut-être un nombre fini de ces domaines) situé dans un voisinage D d'une singularité S , a au moins deux sommets transcendants, et s'il y a une infinité de ces domaines l'un à côté de l'autre, il y a dans D une infinité de faisceaux transcendants. Il complète et précise d'autre part ses résultats antérieurs relatifs au cas où il y a une ou plusieurs valeurs exceptionnelles dans D (voir la ref. préc.). *G. Valiron (Paris).*

Radojčić, Miloš: Sur une propriété des fonctions analytiques dans la proximité des singularités essentielles. Bull. Acad. Sci. Math. Nat., Belgrade Nr **3**, 27—31 (1936).

L'auteur étend ce théorème d'Iversen (Thèse. Helsingfors 1914): Si une fonction méromorphe tend vers une même limite sur deux chemins sans points communs allant à l'infini, ou bien elle tend uniformément vers cette limite lorsqu'on s'éloigne indéfiniment dans l'un D' des deux domaines compris entre ces chemins, ou bien la fonction prend dans D' toute valeur sauf deux au plus. L'aut. considère le cas d'une singularité S isolée ou non, mais suppose que la fonction jouit dans le voisinage considéré D de S de la propriété d'Iversen, à savoir que la riemannienne correspondant à D est illimitée et prolongeable au dessus de toute bande curviligne, si étroite soit-elle, tant qu'on ne rencontre pas la frontière correspondant à la courbe délimitant D . Le théorème d'Iversen s'étend dans D , la seconde alternative étant remplacée par celle-ci: ou bien dans D' la fonction s'approche autant que l'on veut de toute valeur. *G. Valiron.*

Lavrentiev, M.: Sur la continuité des fonctions univalentes. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **4**, 215—217 (1936).

D sei ein beschränktes einfach zusammenhängendes Gebiet in der z -Ebene, das $z = 0$ im Innern enthält; $\varrho_1(z_1, z_2)$ sei die untere Grenze der Längen aller rektifizierbaren Kurven in D , welche die Punkte z_1, z_2 aus D verbinden, $\varrho_2(z_1, z_2)$ sei die untere Grenze aller Querschnitte von D , welche D in zwei einfach zusammenhängende Gebiete zerlegen und dabei z_1 und z_2 von $z = 0$ trennen. Verf. nennt $\min\{\varrho_1(z_1, z_2), \varrho_2(z_1, z_2)\} = \varrho(z_1, z_2, D)$ die „Entfernung“ von z_1 und z_2 bezüglich D . Jede Folge $\{z_k\}$ aus D , deren Häufungspunkte sämtlich auf dem Rande Γ von D liegen, und für die $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \varrho(z_n, z_m, D) = 0$

ist, heißt ein „Randpunkt“. Zwei „Randpunkte“ $t_1 = \{z_k^{(1)}\}$ und $t_2 = \{z_k^{(2)}\}$ sind identisch, wenn $\lim_{k \rightarrow \infty} \varrho(z_k^{(1)}, z_k^{(2)}, D) = 0$ ist. Sind t_1 und t_2 beliebige „Punkte“ aus $D + \Gamma$,

so wird ihre „Entfernung“ bezüglich D als $\varrho(t_1, t_2, D) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varrho(z_k^{(1)}, z_k^{(2)}, D)$ definiert.

Offenbar ist jeder „Randpunkt“ ein Carathéodorysches Primende. Verf. kündigt den folgenden bemerkenswerten Satz an: Die Funktion $z = f(w)$ bilde $|w| < 1$ konform auf das einfach zusammenhängende schlichte Gebiet D ab. Es sei $|f(w)| \leq M$. Dann gilt:

$$|w_2 - w_1| \leq K_1 \sqrt{\varrho(z_1, z_2, D)} \quad \text{und} \quad \varrho(z_1, z_2, D) \leq K(M) |\log |w_1 - w_2||^{-1/2},$$

wobei w_1, w_2 beliebig in $|w| \leq 1$ und z_1 und z_2 die ihnen vermittle $z = f(w)$ umkehrbar eindeutig zugeordneten „Punkte“ aus $D + \Gamma$ sind. K_1 ist eine absolute Konstante, und $K(M)$ hängt nur von M ab. *S. E. Warschawski (Ithaca, N. Y.).*

Wolff, Julius: Sur les domaines invariants dans la représentation conforme. C. R. Acad. Sci., Paris **204**, 1101 (1937).

Sei D das Innere eines um $z = 0$ gezogenen Kreises C und $w = w(z)$ eine Funktion, welche D auf ein Teilgebiet D_1 von D konform abbildet, dessen Rand C_1 einen einzigen gemeinsamen Punkt α mit C hat; es sei ferner $w(0) = 0$, $w(\alpha) = \alpha$. Die Funktion $w(z)$ bildet D_1 auf ein Teilgebiet D_2 von D_1 ab, dessen Rand C_2 den Punkt α

als einzigen gemeinsamen Punkt mit C_1 hat. Die Fortsetzung dieses Verfahrens ergibt eine Folge von ineinanderliegenden Gebieten D, D_1, D_2, \dots , welche den Punkt $z=0$ enthalten und deren Ränder den Punkt $z=\alpha$ als einzigen gemeinsamen Punkt haben. Die für alle D_k gemeinsame Menge N ist das größte Gebiet, das für die Transformation $w=w(z)$ invariant ist. Verf. beweist unter Anwendung der Winkelableitung von $w(z)$ in α , daß, wenn D_1 eine den Kreis C in α tangierende Kreisscheibe enthält, dies auch für N gilt, und daß in N dann ein Gebiet enthalten ist, dessen Rand die Punkte $z=0$ und $z=\alpha$ enthält. V. Paatero (Helsinki).

Bergmann, Stefan: Über eine Integraldarstellung von Funktionen zweier komplexer Veränderlichen. Rec. math. Moscou, N. s. 1, 851—861 (1936).

Verf. gibt unter mehreren Voraussetzungen eine Integralformel, analog der von Cauchy, für analytische Funktionen in Bereichen an, die von endlich vielen analytischen Hyperflächen berandet werden. Als Integrationsgebiet treten die 2dim. „ausgezeichneten Randflächen“ auf (s. dies. Zbl. 9, 262). Behnke (Münster i. W.).

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik und Anwendungen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik:

● **Bachelier, Louis: Les lois des grands nombres du calcul des probabilités.** Paris: Gauthier-Villars 1937. VII, 36 pag. Frs. 18.—

In Arbeiten 1900—1901 und insbesondere in seinem Calcul des Probabilités (Paris 1912) hat Verf. zur bequemeren Ableitung von Formeln, die sich auf Summen einer großen Anzahl n von stochastischen Veränderlichen beziehen, n formal als stetige Veränderliche behandelt. So ergeben sich zunächst (mindestens plausible) Approximationsformeln; interpretiert man jedoch n als die Zeit, so handelt es sich um spezielle stochastische Prozesse (deren von Kolmogoroff begründete systematische Theorie vom Verf. jedoch anscheinend scharf abgelehnt wird). Das Büchlein soll nun zur Bequemlichkeit des Lesers die vom Verf. im Buche von 1912 auf diesem Wege abgeleiteten Formeln in den einfachsten und gebräuchlichsten Spezialfällen zusammenstellen. Behandelt werden nur Versuche mit endlich vielen (gewöhnlich zwei) möglichen Ausgängen. Berechnet wird z. B. die Wahrscheinlichkeit dafür, daß im Laufe von n Versuchen die Frequenz vom Mittelwert mindestens oder genau einmal um x abweicht; oder auch daß dies genau nach n Versuchen geschieht. Weiter die mittlere Anzahl von Versuchen, bei denen eine Abweichung um x zu erwarten ist u. dgl. m. Die Formeln werden bloß angegeben, ohne Beweis und Erklärung. W. Feller (Stockholm).

● **Lévy, Paul: Théorie de l'addition des variables aléatoires. (Monogr. d. probabilit. calcul d. probabilit. et ses appl. Publiées par Émile Borel. Fasc. 1.)** Paris: Gauthier-Villars 1937. XVII, 328 pag. Frs. 120.—

Diese umfassende Monographie enthält hauptsächlich eine Darlegung der vielfältigen Untersuchungen des Verf. über die asymptotischen Gesetzmäßigkeiten, die bei der Summation von zufälligen Größen zur Geltung kommen. Einige vorbereitend Kapitel haben das Ziel, dem Leser die mathematischen Begriffe und Methoden der modernen Wahrscheinlichkeitstheorie bekanntzumachen; insbesondere wird hier der neue, vom Verf. eingeführte und für den nachstehenden Hauptstoff wichtige Dispersionsbegriff erläutert. Das 5. Kapitel ist dem Gaußschen Verteilungsgesetz gewidmet; die bekannten von Verf. und W. Feller kürzlich aufgestellten notwendigen und hinreichenden Bedingungen, damit dieses Gesetz als Grenzesetz bei Summation unabhängiger zufälliger Größen auftritt, werden hier unter Benutzung des neuen Cramérschen Satzes über die Zerlegung der Gaußschen Gesetze in sehr vereinfachter Form auseinandergesetzt. Das 6. Kapitel berichtet über die „abzählbaren“ Wahrscheinlichkeiten und die Konvergenz von Reihen, deren Glieder zufällige Größen sind. Am Schluß wird ein tiefliegender Satz von Verf. und W. Doeblin über das Verhalten der Dispersion bei Summation unabhängiger Größen wiedergegeben. Die grundsätzlich neuesten und wichtigsten Ergebnisse bringt das 7. Kapitel, wo die Theorie der Integrale mit zufälligen, gegenseitig unabhängigen Elementen dargelegt wird; diese Theorie, zu der Verf. bekanntlich Vielfältiges und zum Teil Abschließendes beigetragen hat, reduziert sich prinzipiell auf die Erforschung der unbeschränkt teilbaren Verteilungs-

gesetze, die die allgemeinste Lösung des hier entstehenden Hauptproblems liefern. Zunächst wird der Fall der stetigen zufälligen Funktionen ausführlich behandelt, in welchem die Inkremente der Funktion durch das Gaußsche Gesetz geregelt werden. Dann wird die Rolle des Poissonschen Gesetzes erläutert und die allgemeine Lösung des Problems gegeben; die Methode ist von den früher veröffentlichten verschieden und wesentlich vereinfacht. Es folgen drei ganz neue Abschnitte: über die Arithmetik der Verteilungsgesetze, über die Konstruktion der stabilen Gesetze aus der Theorie der unbeschränkt teilbaren Gesetze und über die mehrdimensionale Verallgemeinerung der gesamten Theorie. Im 8. Kapitel werden Summen von gegenseitig abhängigen Größen (insbesondere Markoffsche Ketten) behandelt. Den Gegenstand der Darlegung bilden hier: die Verallgemeinerung des Ljapounoffschen Satzes, die Konvergenz von Reihen, das starke Gesetz der großen Zahlen und der Satz vom iterierten Logarithmus. Ein letztes, etwas abseits stehendes Kapitel ist den Anwendungen auf die Theorie der Kettenbrüche gewidmet. — Der verhältnismäßig große Umfang der Monographie ist lediglich stofflich bedingt; die Darstellung ist knapp und erfordert vom Leser nicht geringe Anstrengung. *A. Khintchine* (Saratow).

Hostinský, B.: *Sulle successioni di variabili casuali.* Giorn. Ist. Ital. Attuari 8, 8—13 (1937).

Sehr detaillierte Erklärung Markoffscher Ketten verschiedener Ordnung. Beispiele. *A. Khintchine* (Saratow).

Tedeschi, B.: *Sull'inversione della formola approssimata di Laplace-Eggenberger.* Giorn. Ist. Ital. Attuari 8, 43—47 (1937).

Fortsetzung der Untersuchung (dies. Zbl. 11, 217) über die Anzahl n der notwendigen Versuche, daß (im Bernoullischen Falle) die Wahrscheinlichkeit einer relativen Abweichung $|f_n - p| < \varepsilon$ einen gegebenen Wert P nicht übersteigt. Eine genauere Analyse des Näherungsgrades der Laplaceschen und Eggenbertschen Formeln führt nun zu besseren Abschätzungen einer oberen Grenze für das gesuchte n und außerdem zu einer unteren Grenze. *Bruno de Finetti* (Trieste).

Steffensen, J. F.: *Über die semi-normale Verteilung.* Mat. Tidsskr. B 1937, 1—5 [Dänisch].

Steffensen, J. F.: *On the semi-normal distribution.* Skand. Aktuarie Tidsskr. 20 60—74 (1937).

Für die Untersuchung einseitig begrenzter stochastischer Veränderlichen ist die Verteilungsfunktion: $f(x) = Ax^{2-1}e^{-\frac{x^2}{2M}}$ für $x > 0$, $f(x) = 0$ für $x \leq 0$ von Bedeutung. Verf. zeigt, daß sie nach einer geeigneten Koordinatentransformation für $\lambda \rightarrow \infty$ gegen die Gaußsche Normalfunktion konvergiert. Ferner wird der Quotient zweier nach $f(x)$ verteilten stochastischen Veränderlichen untersucht. *W. Feller*.

Ottestad, Per: *The exponential frequency function and frequency distributions.* Metron 13, 51—75 (1937).

The author adapts the approximation coefficient of Guldberg (see this Zbl. 3, 17) to the normal frequency function in the case in which the zero of the variable is unknown. This gives a criterion in terms of the frequencies of each three successive frequency classes and the population variance which should be unity within sampling errors if the appropriate graduation function for an observed distribution is the normal frequency function. If the criterion is judged to be sufficiently well satisfied, the difference equation from which the criterion was derived is used to calculate the graduated frequencies. The device is extended to the graduation of bivariate distribution by means of the normal correlation function. Several numerical illustrations are given and discussed. *C. C. Craig* (Ann Arbor, Michigan).

Kirkham, William J.: *Note on the derivation of the multiple correlation coefficient.* Ann. math. Statist. 8, 68—71 (1937).

Demonstration of the well-known formula $R_i^2 = 1 - \frac{K}{K_{ii}}$, where R_i ($i = 1, \dots, n$) is the multiple correlation coefficient of the i^{th} variate, determined by N samples

$(X_{11}, \dots, X_{n1}), \dots, (X_{1N}, \dots, X_{nN})$ from an infinite n -variate population (X_1, \dots, X_n) , K the determinant whose elements are the corresponding total correlation coefficients $r_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 1, \dots, n; r_{\mu\mu} = 1$), and K_{ii} the co-factor of r_{ii} in K . *W. Simonsen.*

Tricomi, F.: Sul rapporto fra la media dei quadrati di più errori e il quadrato della media dei loro valori assoluti. *Giorn. Ist. Ital. Attuari* 8, 68—77 (1937).

Es wird angenommen, daß sämtliche Fehler einem normalen Verteilungsgesetz mit demselben Präzisionsmaß unterliegen. Das Verteilungsgesetz des im Titel genannten Quotienten, dessen Ermittlung den Gegenstand der Abhandlung bildet, wird mittels einer Reihe von Transformationen auf eine Form gebracht, in welcher es eine einfache (mehrdimensionale) geometrische Deutung gestattet. In einer folgenden Arbeit soll der gewonnene Ausdruck zur Berechnung der betreffenden Verteilungsfunktion verwertet werden. *A. Khintchine (Saratow).*

Roos, C. F.: A general invariant criterion of fit for lines and planes where all variates are subject to error. *Metron* 13, 3—20 (1937).

The author surveys methods for finding a line of "best fit" where both variates are subject to error. Beside the general treatment by C. H. Kummell (1879) and M. Merriman (1890) he cites contributions by R. J. Acock (1877), Karl Pearson (1901), L. J. Reed (1921), H. S. Uhler (1923), Henry Schultz (1925), Corrado Gini (1921) and G. Pietra (1924, 1932), and E. C. Rhodes (1927). The author finds for the general expression invariant under homogeneous strain and translation, $U = \sum p_i |a x_i + b y_i + c|^n$, where $a \cos \alpha + b \sin \alpha$ is to be independent of a, b, c and i . This yields the traditional solutions as special cases. The discussion is extended to the fitting of planes and hyperplanes. *Albert A. Bennett (Providence).*

Jones, Herbert E.: Some geometrical considerations in the general theory of fitting lines and planes. *Metron* 13, 21—30 (1937).

The geometrical aspects of the preceding paper are here discussed. The correlation ellipse (or ellipsoid) is symmetrical with respect to the line (or plane) of best fit, when the graph is constructed to proper scale on the axes. As r_{xy} varies, the shape of the ellipse varies but remains inscribed in a rectangle whose dimensions are independent of r_{xy} . When the errors are regarded as of the same relative order, the line is the diagonal of this rectangle. *Albert A. Bennett (Providence).*

Zaycoff, Rascheo: Über die Zerlegung statistischer Zeitreihen in drei Komponenten. Sonderdruck aus: *Publ. Statist. Inst. Economic Res., State Univ. of Sofia* Nr 4, 22 S. (1936).

Eine von A. Wald (Berechnung und Ausschaltung von Saisonschwankungen. Wien 1936) vorgeschlagene Zerlegungsmethode wird weitergeführt, hauptsächlich durch Benutzung zweier nochmaliger Durchschnittsbildungen. Beispiel. — Die Benennung „fastperiodische Funktion“ (S. 2) ist irreführend. *Herman Wold (Stockholm)*

Kosten, L.: Über Sperrungswahrscheinlichkeiten bei Staffelschaltungen. *Elektr. Nachr.-Techn.* 14, 5—12 (1937).

Unter der Annahme, daß jede Leitung entweder einer oder allen Gruppen zur Verfügung steht und daß eine Leitung letzterer Art nur dann belegt werden kann, wenn sämtliche Leitungen der betreffenden Gruppe schon belegt sind, wird eine obere Schranke für die Sperrungswahrscheinlichkeit in jeder Gruppe berechnet; es wird dabei eine exponentielle Verteilung der Gesprächslängen vorausgesetzt. Mathematisch führt das Problem auf ein System linearer Gleichungen, dessen Lösungen mit Hilfe von erzeugenden Funktionen in Form absolut konvergenter Reihen dargestellt werden. *A. Khintchine (Saratow).*

Physikalische Statistik:

● **Fowler, R. H.:** Statistical mechanics. The theory of the properties of matter in equilibrium. 2. edit. Cambridge: Univ. press 1936. 864 pag. a. 101 fig. bound 50/-.

Im Gegensatz zu der ersten, 1929 erschienenen Auflage dieses grundlegenden Buches wird in der vorliegenden 2. Auflage die Quantenmechanik durchgehend zur Grundlage der

statistischen Mechanik gemacht. Gemäß der Quantenmechanik gehört zu einer abgeschlossenen Gesamtheit eine Reihe von diskreten Energien, und zu jeder Energie gehört eine bestimmte Anzahl von linear unabhängigen Wellenfunktionen. Jede solche Wellenfunktion definiert einen bestimmten Zustand der Gesamtheit. Es wird angenommen, daß eine im statistischen Gleichgewicht stehende Gesamtheit alle unter den gegebenen Bedingungen erreichbaren Zustände auch wirklich annimmt, und zwar mit gleicher a priori-Wahrscheinlichkeit. Die makroskopischen Eigenschaften der Gesamtheit werden daher durch Mittelbildung über alle Zustände mit gleichem Gewicht erhalten. Im Grenzfall der klassischen Mechanik führt dieses Prinzip zu der Forderung, daß jedem Zustand ein Gewicht zukommt, das dem Volumen des entsprechenden Zustandsgebietes im Phasenraum proportional ist. In ähnlicher Weise ist die Schwankung einer makroskopischen Größe P um ihren Mittelwert \bar{P} durch Mittelbildung über $(P - \bar{P})^n$ zu berechnen. Zur Berechnung der Mittelwerte besonders geeignet ist die von Darwin und Fowler entwickelte „Sattelwertsmethode“ (method of steepest descent), die in dem vorliegenden Buche weitgehend herangezogen wird. Nachdem auf Grund dieser Prinzipien zunächst die allgemeinen Sätze der statistischen Mechanik für Gesamtheiten permanenter Systeme abgeleitet worden sind, werden sie zunächst auf die idealen Gase angewendet, wobei besonders die spezifischen Wärmen und ihr Zusammenhang mit der Theorie der Molekülspektren eingehend behandelt werden. Weiter werden die Verteilungsfunktionen für die Hohlraumstrahlung und für einen Kristall berechnet und hieraus die wichtigsten thermischen Eigenschaften der Kristalle abgeleitet. Läßt man zu, daß zwischen den Systemen der Gesamtheit Assoziations- und Dissoziationsvorgänge sich abspielen, dann führt die allgemeine Theorie zur Behandlung von Gleichgewichten (Dissoziationsgleichgewicht in Gasen, Dampfspannung von Kristallen, Mischkristallbildung usw.). Hierauf folgt die Ableitung der Beziehungen zwischen der Theorie des statistischen Gleichgewichtes und den Sätzen der Thermodynamik, wobei besonderes Gewicht auf eine möglichst einwandfrei statistische Deutung der Entropie gelegt wird. In eigenen Kapiteln werden die Verhältnisse bei tiefen Temperaturen (der Nernstsche Wärmesatz und die chemischen Konstanten), ferner die realen Gase (auch solche mit elektrisch geladenen Molekülen) und ihre Zustandsgleichungen behandelt. Hieran schließt sich eine Betrachtung über die Kräfte zwischen den Molekülen und ihre Ermittlung auf Grund der Zustandsgleichung der realen Gase und der Eigenschaften von Kristallen. Die Anwendung der allgemeinen Theorie auf eine Gesamtheit von Elektronen führt zur Behandlung des Gleichgewichtes zwischen einem Elektronengas und einem Metall, der Elektrizitätsleitung in Metallen und Halbleitern, der Kontaktpotentiale, der Thermoelektrizität und verwandter Erscheinungen. Hieran schließt sich die Theorie der elektrischen und magnetischen Suszeptibilität materieller Körper und des Ferromagnetismus, wobei besonders die Heisenbergsche Theorie dieser Erscheinung und die magnetischen Eigenschaften von Kristallen eingehend besprochen werden. Die Anwendung der allgemeinen Theorie auf Flüssigkeiten beschränkt sich im wesentlichen auf die verdünnten Lösungen, wobei auch die Theorie der starken Elektrolyte von Debye-Hückel zur Sprache kommt. Einen breiten Raum nimmt die Anwendung der Theorie auf die Behandlung der physikalischen Eigenschaften von Materie bei sehr hohen Temperaturen ein, wie sie im Innern von Sternen auftreten, ein Problem, für dessen Förderung Fowler und Darwin den Adamspreis 1923/24 erhielten und das den Kern bildet, um den sich das vorliegende Werk allmählich kristallisiert hat. Im unmittelbaren Zusammenhang damit wird auch das Problem der Sternatmosphären, die Theorie der Umkehrschicht und die Milnesche Theorie der Kalziumchromosphäre behandelt. Weitere Kapitel sind dem Mechanismus der Wechselwirkung durch Stoß zwischen den Molekülen idealer Gase untereinander und mit festen Wänden gewidmet, mit Anwendungen auf die „Stöße zweiter Art“, die Stoßionisation und die chemischen Reaktionen in gasförmigen Systemen. Hieran schließt sich die Besprechung der Wechselwirkungsprozesse zwischen Materie und Strahlung. Eine allgemeine Behandlung der Schwankungserscheinungen wird beschlossen durch Anwendungen auf die Opaleszenz, die Brownsche Bewegung, den Schrotoeffekt und verwandte Erscheinungen. Das letzte Kapitel enthält die neuesten Anwendungsgebiete der statistischen Mechanik, nämlich die Gitterbildung in metallischen Legierungen, die dabei in Erscheinung tretende „Konfigurationswärme“, das Auftreten von Molekülorotationen in festen Körpern, die dielektrischen Erscheinungen in Substanzen von der Art des Rochellesalzes, die einmolekularen Adsorptionsschichten und die kritische Kondensation, die Eigenschaften paramagnetischer Salze bei tiefen Temperaturen und anderes. Fürth.

Hadwiger, H.: Lineare Diffusion zweier Partikel bei verbotenem Abstand. Mitt. naturforsch. Ges. Bern 1936, LVIII—LXII (1937).

Zwei Partikel mögen auf einer Geraden lineare Brownsche Bewegungen ausführen mit dem gleichen Diffusionskoeffizienten D . Gefragt wird nach der mittleren Distanz $\bar{\alpha}$ nach der Zeit t unter den beiden folgenden einschränkenden Bedingungen: 1. Die Anfangsdistanz sei gleich λ , und durch eine geeignete Maßnahme sei dafür gesorgt, daß für alle t stets $\alpha \geq \lambda$ gilt. 2. Die Anfangsdistanz sei gleich Null, und es sei dafür

gesorgt, daß für alle t stets $\alpha \leq \lambda$ ist. Die Aufgaben werden gelöst durch Verwendung der bekannten Methode, die Differentialgleichung der Diffusion zu lösen unter den Randbedingungen, daß sich die Grenzen des verbotenen Bereiches wie spiegelnde Wände verhalten. Hieraus gewinnt man zunächst einfache Ausdrücke für die Wahrscheinlichkeit einer gewissen Distanz α zur Zeit t und daraus dann den gesuchten Erwartungswert von α . Er ist im Falle 2 naturgemäß gleich Null, im Falle 1 gleich:

$$\bar{\alpha} = \lambda + \sqrt{8Dt/\pi}.$$
 Fürth (Prag).

Numerische und graphische Methoden.

Tcherepkoff, F. S.: Sur la solution des systèmes des équations linéaires par la méthode des itérations. Rec. math. Moscou, N. s. 1, 953—958 u. franz. Zusammenfassung 959 (1936) [Russisch].

On étudie le système $x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_i$ ($i = 1 \dots n$). Si ce système est symétrique, alors la condition nécessaire et suffisante pour la convergence du procédé de l'itération simple appliqué à ce système est $|\lambda_1| > 1$ (λ_1 étant le plus petit nombre caractéristique). On trouve aussi une évaluation de l'erreur des valeurs approchées des inconnues après n itérations, ainsi qu'une transformation du système donné qui fait croître $|\lambda_1|$, ce qui améliore la convergence du procédé. Janczewski (Leningrad).

Viola, Tullio: Sulla risoluzione numerica dei sistemi di due equazioni in due incognite. Ric. Sci. progr. tecn. econom. naz. 1, 42—52 (1937).

Es sei das Gleichungssystem $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ gegeben. Hat man ein nach den Koordinatenachsen gestelltes Rechteck $ABCD$ von der Art, daß $f(x, y)$ in einem Punkt H der Seite AB und in einem Punkt K der Seite CD , $g(x, y)$ in einem Punkt L der Seite AC und in einem Punkt M der Seite BD verschwindet, so liefert der Schnittpunkt P_1 der beiden Verbindungslinien HK und LM Näherungswerte für das Lösungspaar (das von anderen bereits getrennt gedacht ist). — Von P_1 ausgehend kann man durch lineare Interpolation längs gewisser gerader Linien in der Ebene zu immer besseren Näherungswerten gelangen. — Ein anderes Verbesserungsverfahren geht so vor: Die vier Schnittpunkte H, K, L, M werden in kleine Intervalle $H', H''; K', K''; L', L''; M', M''$ eingeschlossen und entsprechende Punkte wie H' und K' usw. durch nach außen gekrümmte Kreisbogen mit Krümmungen, die größer als die der Kurven $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ (die nach einer bequemen Formel abgeschätzt werden können) sind, verbunden. Diese vier Kreisbogen schneiden einander in vier Punkten, durch die ein neues nach den Achsen gestelltes Rechteck bestimmt wird, das nach derselben Art weiter verengt werden kann. — Zahlenbeispiel. L. Schrutka (Wien).

Kobbernagel, P.: Eine Bemerkung über Genauigkeit bei Interpolation. Mat. Tidsskr. B 1937, 6—10 [Dänisch].

Es wird die Differenz zwischen x^{n+m} und dem zugehörigen Newtonschen Interpolationspolynom n -ten Grades dargestellt; sie kann u. U. dem Betrage nach x^{n+m} übersteigen. Anwendung auf die Darstellung analytischer Funktionen. W. Feller.

Lidstone, G. J.: Notes on interpolation I. The derivation of the general divided-difference formula. II. Aitken's new processes for direct and inverse interpolation. III. Special devices (the throw-back, etc.). J. Inst. Actuar. 68, 267—296 (1937).

Roberts, John L.: Applications of two osculatory formulas. Ann. math. Statist. 8, 1—4 (1937).

● **Glagoleff, N. A.:** Nomographische Sammlung. Moskau u. Leningrad: Onti. Verl. 1935. 260 S. Rub. 5.50 [Russisch].

Die Sammlung ist aus einem nomographischen Seminar des Herausgebers hervorgegangen. Mitverfasser sind außer N. A. Glagolew selbst: Denisjuk, Ermolowa (2 Aufsätze), Gersewanow, A. A. Glagolew, Michalewski, Moldawer (3 Aufsätze), Pentkowski, Perepelkin, Popowa-Glagolewa, Witner. Die Sammlung

gliedert sich in 3 Teile, von denen der erste mit Arbeiten von allgemein-theoretischem Charakter weitaus der größte ist (10 Arbeiten). Es schließen sich im zweiten Teil 2 Arbeiten von mehr praktischer Bedeutung und im dritten 2 Referate über neuere westeuropäische Arbeiten an. — Im Teil I werden folgende Themen bearbeitet: Graphische Behandlung von Funktionalgleichungen [Benutzung von Funktionsleitern zur Auflösung von Funktionalgleichungen der Gestalt $f(\alpha) = \Phi[\alpha \cdot f(\varphi(\alpha))]$ für unbekanntes $f(\alpha)$]. Anwendung der projektiven Geometrie zur Nomogrammkonstruktion [Grundlagen]. Anwendung der Methoden der algebraischen Geometrie zur Nomogrammkonstruktion. Über einen Fall allgemeiner Anamorphose [Möglichkeit von Fluchtlinientafeln für Gleichungen der Gestalt

$$f(z_1, z_2) \varphi_3(z_3) + g(z_1, z_2) \psi_3(z_3) + h(z_1, z_2) = 0,$$

auch Behandlung von Nomogrammen mit krummlinigen Weisern, Literaturnachweis]. Notwendige und hinreichende Bedingungen für Verstreckbarkeit von Funktionen dreier Veränderlicher. [Um notwendige Bedingungen zu erhalten, daß eine gegebene Funktion $F(x, y, z)$ die Gestalt

$$F(x, y, z) = \begin{vmatrix} f_1(x) & g_1(x) & 1 \\ f_2(y) & g_2(y) & 1 \\ f_3(z) & g_3(z) & 1 \end{vmatrix}$$

hat, eliminiert man aus dieser Gleichung und 19 durch passende Differentiation daraus entstehenden Gleichungen die $f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3$ und ihre Ableitungen. Die gefundenen Bedingungen sind unter gewissen Umständen auch hinreichend. Sonderfälle, Beispiele.] Nomogramme für quadratische Formen [verstreckender Faktor, Spaltung, Descartesche Tafel, veränderliche Koeffizienten, Schiebeblätter, Stechzirkelnomogramme]. Nomogramme für die symmetrische Gleichung dritter nomographischer Ordnung. Zusammenschluß zweier verschiedener Arten der Gewinnung von Fluchtlinientafeln. Korrelative Abbildung von Massautafeln nach der Polarenmethode. Verbindung von Netz- und Fluchtlinientafeln zur Darstellung einer Gleichung mit 5 Veränderlichen. — Teil II. Zur Frage der Genauigkeit von Funktionsleitern. [Für eine Funktionsleiter $x = f(t)$, $y = g(t)$ wird die „Dichte“ der Leiter an der Stelle t durch den Quotienten $\frac{\Delta t}{t}$

erklärt, wobei Δt die t -Änderung ist, für welche man sich auf der Leiter um den festen vorgegebenen Bogen δ fortbewegt. Anwendung auf Herstellung von Leitern möglichst kleiner maximaler Dichte durch Umprojizieren.] Projektive Abbildung von Nomogrammen. [Es wird ein quadratischer Mittelwert der Abweichung einer Funktionsleiter von einer logarithmischen Leiter als „Güte“ der Funktionsleiter eingeführt. Untersuchung der Umprojektion einfacher Nomogrammtypen.] — Teil III. Referate über Arbeiten von Fischer (z. B. Z. angew. Math. Mech. 7, 8, 9) und Margoulis (vgl. z. B. Les abaques à transparent orienté ou tournant. Paris 1931). Theodor Zech.

Besikowitsch, I.: Über eine Modifikation der Störmerschen Integrations-Methode der Differentialgleichungen höherer Ordnung. Trans. Leningrad Industr. Inst., Sect.: Phys. a. Math. Nr 10, 30—35 u. deutsch. Zusammenfassung 35 (1936) [Russisch].

Anstatt eine Differentialgleichung 2. Ordnung auf ein System zurückzuführen, empfiehlt der Verf. y' mittels der Störmerschen Formel auszurechnen ($h y'' = q$), und gleichzeitig y mittels derselben Differenzentabelle nach der Formel:

$$y_{n+1} = y_n + h y'_n + h \left(\frac{1}{2} q_n + \frac{1}{6} \Delta q_{n-1} + \frac{1}{8} \Delta^2 q_{n-2} + \frac{77}{1440} \Delta^3 q_{n-3} \right).$$

Die vier ersten Werte von y, y' sollen vorher ausgerechnet werden. W. Stepanoff.

Bradfield, K. N. E., S. G. Hooker and R. V. Southwell: Conformal transformation with the aid of an electrical tank. Proc. Roy. Soc. London A 159, 315—346 (1937).

Während Aufgaben der Potentialtheorie, bei denen die Potentialfunktion längs eines Randes konstante Werte annimmt, im elektrischen Tank ohne weiteres lösbar sind (Umströmung von Konturen), bereitet die experimentelle Lösung von Aufgaben

mit veränderlichen Randwerten im Tank (Torsionsproblem) erhebliche Schwierigkeiten. Nach der von den Verff. vorgeschlagenen und an Beispielen durchgeführten Methode wird das zu lösende Randwertproblem durch konforme Abbildung in ein anderes theoretisch leicht lösbares Randwertproblem übergeführt — z. B. Abbildung eines Dreiecks durch einen Kreis —, wobei die zu leistende konforme Abbildung experimentell mit Hilfe des elektrischen Tankes durchgeführt wird. Die experimentelle Behandlung von Aufgaben der konformen Abbildung wird ausführlich besprochen und die Genauigkeit der Lösungen an Beispielen nachgeprüft. *K. Hohenemser* (Berlin).

Picone, Mauro: Nuovi contributi all' analisi quantitativa dei problemi di propagazione. Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, Rend., IV. s. 6, 217—235 (1936).

Si rende conto degli ulteriori progressi conseguiti, presso l' Istituto per le Applicazioni del Calcolo, nei metodi di analisi quantitativa dei problemi di propagazione. *Autoreferat.*

Meyer zur Capellen, W.: Neuere Apparate zur mechanischen Integration. Z. Instrumentenkd. 57, 103—117 u. 137—146 (1937).

Es werden besprochen: 1. Planimeter im erweiterten Sinne, bei denen eine Meßrolle den Wert eines bestimmten Integrals anzeigt, sobald die vollständige Begrenzung einer ebenen Figur von einem Fahrstift beschrieben ist. Mehrere Instrumente sind speziell für Integrale der Form $\int_{x_1}^{x_2} y^n dx$ konstruiert, und zwar werden sie in den Fällen $n = 1, 2, 3, \dots, \frac{1}{2}, -1$ Grund-, Quadrat-, Moment-, Wurzel-, Inversionsplanimeter genannt. Es gibt aber auch Planimeter für $\int_{x_1}^{x_2} f(x) dh(x)$ und $\int_{x_1}^{x_2} f(g(x)) dx$, wobei sogar die beiden auftretenden Funktionen $f(x), g(x), h(x)$ beliebig gegeben sein können. 2. Integrimeter, bei denen die Rollenablesung in jeder Stellung den Wert eines Integrals als Funktion der oberen Grenze angibt. 3. Integrappen, welche die Integralkurve einer gegebenen Funktion oder einer gegebenen Differentialgleichung aufzeichnen. — Angaben über einzelne der besprochenen Apparate findet man mit Hilfe des Sachregisters dieses Zentralblattes (Numerische und graphische Methoden, Instrumente). *Nyström* (Helsingfors).

Baer, Hans: Genauigkeitsuntersuchungen am Polarplanimeter. Z. Instrumentenkd. 57, 177—189 (1937).

Voigt, W.: Ein neuer Hypotenusenrechenschieber. Allg. Vermessgs-Nachr. 49, 225—229 (1937).

Der beschriebene Rechenschieber enthält neben den üblichen Hauptleitern je eine Leiter für

$$\lg p = \lg \left(\sqrt{1 + \frac{1}{q^2}} - 1 \right) \quad (5,9 \geq q \geq 1)$$

und $\lg \sqrt{1 + \frac{1}{q^2}}$. Ist $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ und $a > b$, so rechnet man entweder mit der ersten Leiter $c = a + z$, $z = ap$, $q = \frac{a}{b}$ (z gleich Zuschlag zur größeren Kathete) oder mit der zweiten $c = a \sqrt{1 + \frac{1}{q^2}}$, $q = \frac{a}{b}$. Ein derartiger, im Besitz des Verf. befindlicher Rechenschieber hat sich bei 16jährigem Gebrauch bewährt. Über die Genauigkeit werden Einzelangaben gemacht. Die Rechendauer wird mit der für Benutzung einer Quadrattafel verglichen.

Theodor Zech (Darmstadt).

Geometrie.

Steck, Max: Die Fundamentalsätze in der endlichen projektiven Geometrie des Veblensystems S (21/2/5). Mh. Math. Phys. 45, 320—331 (1937).

In Verfolg zweier früherer Arbeiten (s. dies. Zbl. 15, 170ff.) beschäftigt sich Verf. mit der endlichen projektiven Geometrie des Veblensystems, das aus 21 Punkten

und 21 Geraden besteht, wobei auf jeder Geraden 5 Punkte liegen, durch jeden Punkt 5 Geraden gehen. Für diese Elemente wird gefordert, daß 2 verschiedene Punkte stets genau mit einer Geraden, 2 verschiedene Geraden stets genau mit einem Punkt inzident sind. In einer demnächst erscheinenden Arbeit ist bewiesen, daß dieses System eine endliche minimale Pappus-Pascalsche Geometrie enthält, und es wird die definierende Inzidenztafel angeschrieben. An Hand von ihr wird jetzt gezeigt, daß in dieser endlichen Geometrie allein mit Hilfe der obengenannten Verknüpfungsaxiome die beiden folgenden als „kleiner“ bzw. „großer“ Fundamentalsatz bezeichneten (hier zusammengefaßten) Aussagen bewiesen werden können: Es gibt zwischen den Punkten zweier verschiedener Geraden des gegebenen Systems mindestens eine als Folge zweier bzw. dreier Perspektivitäten erklärte projektive Beziehung, die durch 3 vorgegebene Paare sich entsprechender Punkte vollständig und eindeutig bestimmt ist. Ferner gilt, daß jede durch 2 Perspektivitäten erklärte projektive Beziehung zwischen 2 Geraden, bei der der Schnittpunkt der beiden Geraden sich selbst entspricht, durch eine Perspektivität ersetzt werden kann.

R. Moufang (Frankfurt a. M.).

Barbilian, D.: Exkurs über die Dreiecke. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 38, 3—62 (1936).

Sind S_i ($i = 1, 2, 3$) die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks \triangle , so gilt für die Abstände SS_i eines beliebigen Punktes S der Dreiecksebene von den Ecken die Ungleichung $2SS_i \leq SS_1 + SS_2 + SS_3$, wobei das Gleichheitszeichen nur auftreten kann, wenn S auf dem Umkreis K von \triangle liegt (Satz I). Daneben wird der Satz II betrachtet: Sind S_1, S_2, S_3 drei verschiedene Punkte, für die $S_2S_3 > S_3S_1 \geq S_1S_2$ ist, so gilt für alle Punkte S ihrer Ebene $SS_1 < SS_2 + SS_3$. Für diese Sätze werden verschiedene Beweise erbracht, und anschließend wird untersucht, wieweit die Aussagen I und II von den verschiedenen Axiomgruppen abhängen. Man erkennt zunächst leicht, daß I und II weder vom Archimedischen Axiom noch vom Vollständigkeitsaxiom abhängen. Vom Parallelenpostulat ist I nicht unabhängig, denn in der Bolyai-Lobatschewskijschen Geometrie gilt zwar noch die obige Ungleichung, aber das Gleichheitszeichen tritt nur auf, wenn S in eine Dreiecksecke fällt (Satz I_h). Dagegen gilt Satz II auch in der hyperbolischen Ebene unverändert. In der elliptischen ebenen Geometrie, die sich von der hyperbolischen durch die Anordnung unterscheidet, gilt I nicht ausnahmslos, denn es gibt bei geeigneter Wahl von \triangle Bereiche von Punkten S , für die die Strecken SS_i kein Dreieck bilden; auch Satz II gilt nicht mehr ausnahmslos. Der Beweis für die Aussage I_h wird auf einfachem Wege in Analogie zu einem Beweise der Euklidischen Geometrie axiomatisch erbracht und überdies zusammen mit den übrigen Aussagen für die beiden nichteuklidischen Geometrien durch ein geometrisches Abbildungsverfahren und Zuhilfenahme flächentheoretischer Betrachtungen geliefert, wobei Verf. insbesondere ein metrisches Modell der von Klein untersuchten Fläche 3. Ordnung und 4 reellen Knotenpunkten heranzieht. Die Abhängigkeit der Aussagen I_h und II von den Kongruenzaxiomen III_{4-5} unter Beibehaltung der Forderung, daß die Gerade die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten ist, erkennt Verf. durch Konstruktion einer geeigneten Hilbert-Lindemannschen Geometrie (H-L. Geometrie), in der es in bezug auf ein geeignetes gleichseitiges Dreieck Gebiete von Punkten S gibt, für die I_h falsch ist, desgleichen ist II nicht erfüllt. Zur axiomatischen Begründung dieser Geometrie genügen die Axiome der Verknüpfung, Anordnung, die Kongruenzaxiome $III_{2,3}$, ein geeignetes Zusatzaxiom für die Abtragbarkeit kongruenter Strecken, das Parallelenaxiom in hyperbolischer Form und das Archimedische Axiom in passender Formulierung. Die Längenmessung in dieser Geometrie wird mit Hilfe von Doppelverhältnissen in dem von einer konvexen Kurve begrenzten Bereich durchgeführt, die Begrenzung ist in der Modellgeometrie des Verf. zunächst ein Sechseck, dessen Seiten nachträglich in geeigneter Weise durch flache konvexe Kurvenbögen ersetzt werden. — Erklärt man in der H-L. Geometrie das Senkrechtstehen von Geraden in geeigneter Weise mit Hilfe von Entfernungsextrema zwischen Punkten, so

gilt, daß eine H-L. Geometrie, in der die Beziehung senkrecht symmetrisch ist, eine Bolyai-Lobatschewskijsche Geometrie (B-L. Geometrie) ist. Verf. vermutet, daß in einer H-L. Geometrie, in der die Sätze II bzw. I_h gelten, das Senkrechtstehen notwendig eine symmetrische Beziehung ist, so daß diese Geometrie mit der B-L. Geometrie zusammenfiel.

R. Moufang (Frankfurt a. M.).

Thébault, V.: Einem Dreieck zugeordnete Kreise. *Gaz. mat.* 42, 452—455 (1937) [Rumänisch].

Ionescu-Bujor, C.: Über orthogonale Kreise. *Gaz. mat.* 42, 455—461 (1937) [Rumänisch].

Richmond, H. W.: On the configuration known as a double-six of lines. *Math. Notes* Nr 30, IV—VI (1937).

Hadwiger, Hugo: Über die rationale Lagerung des regulären Simplex. *Math. Z.* 42, 625—628 (1937).

Falls ein reguläres Simplex derart gestellt werden kann, daß seine Eckpunkte in einem rechtwinkligen Koordinatensystem rationale Koordinaten haben, heißt es rational gelagert. In Räumen gerader Dimensionszahl $N = 2\nu$ ist eine rationale Lagerung dann und nur dann möglich, wenn $N = 2\nu = 4(\mu^2 + \mu)$. Für Räume ungerader Dimensionszahl wird gezeigt, daß bei $N = 2^\mu - 1$ eine solche rationale Lagerung möglich ist, bei der die Eckpunkte die Koordinatenwerte $+1$ und -1 haben.

J. J. Burckhardt (Zürich).

● **Prager, W.:** Darstellende Geometrie. Teil 1. (Veröff. d. Univ. Istanbul. Nr. 44.) Istanbul: Arkadaş Druckerei 1937. 77 S. [Türkisch].

Inhalt: I. Darstellung der Raumelemente. II. Aufgaben der Verknüpfung. III. Gebrauch von mehr als zwei Projektionsebenen. IV. Aufgaben der Parallelität und Orthogonalität. V. Aufgaben der Kongruenz. VI. Beziehungen zwischen einer ebenen Figur und ihren Projektionen. VII. Pyramide und Prisma.

Rinner, Karl: Beiträge zur Wienersehen Imaginärprojektion. S.-B. Akad. Wiss. Wien 1936, 549—566 (H. 7/8).

Es wird zunächst auf synthetischem Wege nachgewiesen, daß zwei Imaginärprojektionen eines Kegelschnittes stets harmonisch kollinear sind. Hieraus ergeben sich sofort einige Anwendungen, z. B. die konstruktive Ermittlung der durch zwei gegebene Punkte gehenden Imaginärprojektionen eines Kegelschnittes, insbesondere der unter diesen Imaginärprojektionen vorhandenen Kreise. Ferner wird der Zusammenhang zwischen dem reellen Vertreter des Zentralrisses eines nullteiligen Kegelschnittes und dem Zentralriß seines reellen Vertreters klargestellt. Schließlich werden die analogen Beziehungen zwischen den zentralen und windschiefen Imaginärprojektionen von Flächen 2. Gr. abgeleitet.

J. L. Krames (Graz).

Sisam, C. H.: Pohlke's theorem in four dimensions. *Amer. Math. Monthly* 44, 231—234 (1937).

Analytischer Beweis der bekannten Verallgemeinerung des Satzes von Pohlke, die wie folgt formuliert wird: Irgend vier von einem Punkt ausgehende reelle Strecken OP_i ($i = 1, \dots, 4$) eines R_3 σ können immer aus vier reellen, gleich langen und paarweise normalen Strecken $O^*P_i^*$ eines R_4 durch zwei aufeinanderfolgende Parallelprojektionen erhalten werden, wobei die erste das Vierbein $O^*P_i^*$ auf einen R_3 σ' projiziert und die zweite normal zu σ' erfolgt.

J. L. Krames (Graz).

Emeh, Arnold: Note on Pohlke's theorem. *Amer. Math. Monthly* 44, 234 (1937).

Hinweis auf einen vom Verf. früher angegebenen Beweis des Satzes von Pohlke und Andeutungen analoger Beweise für seine n -dimensionalen Verallgemeinerungen.

J. L. Krames (Graz).

Analytische und algebraische Geometrie:

● **Burgatti, Pietro:** Elementi di calcolo vettoriale e omografico. Milano: Ulrico Hoepli 1937. X, 188 pag. e 14 fig. rilegato L. 10.—.

Darstellung der Lehre von den Vektoren und Homographien (= Affinoren) in

der Art von Burali-Forti und Marcolongo. I. Kapitel (61 S.): Vektorrechnung: Freie Vektoren, Summe, Produkte; gebundene Vektoren, Koordinatendarstellung, Anwendungen. (Der Beweis des Entwicklungssatzes aus S. 18 kann nicht als ausreichend bezeichnet werden.) — II. Kapitel (53 S.): Homographien, Invarianten, Konjugierte, usw., Sonderfälle, Anwendungen. — III. Kapitel (39 S.): Differentialoperatoren: Gradient, Rotation, Divergenz. — IV. Kapitel (36 S.): Integralsätze. *L. Schrutka.*

Cherubino, Salvatore: Sulla teoria delle omografie di uno spazio S_{n-1} in sè. Rend. Semin. mat. Roma, IV. s. 1, 139—174 (1937).

By using a particular type of canonical form for a set of similar matrices the author is enabled to derive very rapidly the theory of collineations of a linear space into itself, and to obtain the classical theorems regarding the fundamental spaces of the collineation. In particular, the method leads to a theory of the secondary spaces associated with the roots of the characteristic equation of the collineation; these spaces are the intersections of fundamental spaces with the bases of fundamental stars connected with the same root of the equation, and only exist for collineations of special type. The author also applies his method to solve the problem of determining the conditions for two collineations to be permutable. *J. A. Todd* (Manchester).

Schmid, W.: Quadratische Transformationen und Kegelschnitt-Dreiecksnetze. Čas. mat. fys. 66, 210—216 (1937).

Verf. untersucht die Kegelschnitt-Dreiecksnetze einer Ebene π' , die sich mittels einer nichtrationalen (2,2)-deutigen Transformation zweiter Ordnung aus den geradlinigen Dreiecksnetzen [vgl. dies. Zbl. 7, 358 (Blaschke); 8, 26 (Verf.), 171 (Sauer-Baier)] einer Ebene π'' ableiten lassen. Den ∞^2 Geraden von π'' entspricht dabei ein System Σ von Kegelschnitten in π' , die einen Kegelschnitt u'_1 doppelt berühren und deren Tangenten in den Schnittpunkten mit einem u'_1 doppeltberührenden Kegelschnitt u'_2 durch einen festen Punkt von π' gehen. Die erwähnte Transformation ergibt sich auch durch Projektion einer Fläche 2. Gr. aus zwei Zentren allgemeiner Lage auf die Ebenen π' und π'' . Daraus folgen einige Bemerkungen über die in Σ enthaltenen Dreiecksnetze. Die Hüllkurve eines solchen Netzes ist z. B. i. allg. von 12. Ord. 18. Kl. usw. *J. L. Krames* (Graz).

Otto, Edward Arnold: Correspondances n -linéaires dans les formes unicursales. Wiadom. mat. 43, 87—130 (1937) [Polnisch].

Godeaux, Lucien: Construction d'une surface algébrique de diviseur trois. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 22, 988—991 (1936).

L'étude de surfaces algébriques de diviseur supérieur à l'unité a déjà été faite par l'Auteur (Bull. Acad. Cracovie 1914, 362). Il construit ici une surface simple de diviseur 3: cette surface est du neuvième ordre. *P. Dubreil* (Nancy).

Godeaux, Lucien: Sur une surface canonique appartenant à la variété de Segre représentant les couples de points de deux plans. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 22, 1223—1225 (1936).

L'Auteur établit le théorème suivant: l'intersection de la variété de Segre V_4^2 de l'espace S_8 et d'une hypersurface cubique V_3^3 est une variété à trois dimensions à surfaces canonique et pluricanoniques d'ordre zero; ses sections hyperplanes sont donc des surfaces canoniques. *P. Dubreil* (Nancy).

Maroni, Arturo: Immagini delle serie di equivalenza elementari. Scritti mat. off. a. Luigi Berzolari 511—514 (1936).

Soit, sur une surface algébrique F , une série élémentaire σ_n^r sans groupes fixes ni semi-fixes, intersection complète des systèmes linéaires $|C_1|$ et $|C_2|$ de degrés n_1 et n_2 , de dimensions r_1 et r_2 . L'Auteur construit dans S_r une surface F' d'ordre $n_1 + n_2 + n$, birationnellement identique à F , sur laquelle les groupes de σ_n^r sont découpés par les S_{r-2} qui rencontrent deux espaces indépendants a_1, a_2 à $r_1 - 1$ et $r_2 - 1$ dimensions suivant des hyperplans de ces espaces. *P. Dubreil* (Nancy).

Emeh, Arnold: On certain configurations of points in space and linear systems of surfaces with these as base points. *Bull. Amer. Math. Soc.* 43, 261—265 (1937).

The configurations examined are (I) a figure of 27 points W in three dimensions whose coordinates can be written in the form $(\omega^\alpha, \omega^\beta, \omega^\gamma, 1)$ where $\omega^3 = 1$ and α, β, γ , may take independently any of the values 0, 1 or 2; and (II) a figure of 36 points V whose coordinates have the form $(\omega^\alpha, \omega^\beta, \omega^\gamma, 0)$ or a form derived from this by permuting cyclically. The mutual relations of the two figures are discussed, and various surfaces containing the points are examined, thus the 27 points W appear as the base-points of a net of cubic surfaces. [Remark. The author's Theorem 5 is false. The sextic surface $\sum_{i,k} (x_i^3 - x_k^3)^2 = 0$ is not rational, and the representation which the author gives on a cubic monoid is not birational, since to every point of the monoid correspond 24 points of the sextic surface whose coordinates are derived from those of any one of them by a permutation. The surface cannot be rational, since its only singularities are double points at the 27 points W and these cannot impose the ten virtually independent conditions on the adjoint quadric surfaces which are necessary to make p_a vanish.] J. A. Todd (Manchester).

Differentialgeometrie:

Bell, Clifford: On a determinant function involving the parameter of a plane curve. *Amer. Math. Monthly* 44, 218—221 (1937).

Es sei $x = f(t)$, $y = g(t)$ die Parametendarstellung einer ebenen Kurve und

$$H_{ij}(t) = \begin{vmatrix} \frac{d^i f}{dt^i} & \frac{d^i g}{dt^i} \\ \frac{d^j f}{dt^j} & \frac{d^j g}{dt^j} \end{vmatrix}.$$

Verf. untersucht die Beziehungen, die zwischen dem Verschwinden gewisser H_{ij} und lokalen Eigenschaften, insbesondere Singularitäten der Kurve, bestehen. W. Fenchel.

Weatherburn, C. E.: On the centre of spherical curvature of a curve. *Math. Notes* Nr 30, XI—XII (1937).

Tsuboko, Matsuj: On the locus of the conics osculating a space curve. *Mem. Ryojun Coll. Engrg* 10, 11—17 (1937).

Considérons un point P non singulier d'une courbe gauche Γ et le plan osculateur relatif; celui-ci touche la développable circonscrite à Γ le long de la droite tangente à Γ au point P , et la rencontre ultérieurement suivant une courbe passant par P : la conique K osculatrice en P à cette courbe plane, est nommée la conique osculatrice à Γ au point P . Ici l'A. — en se servant des développements donnés par J. Kanitani [*Mem. Ryojun Coll. Engrg* 6, 98 (1933); ce *Zbl.* 7, 364 et 11, 173] — étudie la surface S décrite par K lorsque P parcourt Γ . Parmi les propriétés qu'il obtient ainsi, signalons les suivantes: les plans tangents à S le long d'une courbe K enveloppent une développable Σ , ayant une cubique gauche comme arrêt de rebroussement; la congruence de droites engendrée par les ∞^1 surfaces réglées Σ est une congruence W si, et seulement si, les tangentes de Γ appartiennent à un même complexe linéaire. D'autres conditions nécessaires et suffisantes afin que Γ présente cette particularité, sont 1) que sur S les courbes K constituent un système de lignes de Darboux; ou bien 2) que S soit une surface isothermo-asymptotique (de Fubini). Beniamino Segre (Bologna).

Hatzidakis, N.: Développées et développantes relatives. *Norsk mat. Tidsskr.* 19, 18—22 (1937).

Wilson, R.: A note on the ruled surface. *Math. Notes* Nr 30, I—II (1937).

Schroeder, Heinz: Die Verbiegung der Flächen II. Ordnung. *Jber. Deutsch. Math.-Vereinig.* 47, 63—68 (1937).

Bekanntlich sind von den Flächen 2. Ordnung F_2 gegenüber Verbiegung im Großen die Kugeln und die Ellipsoide als Ganzes starr (Liebmann); sie werden unstarr,

wenn sie mit einem beliebig kleinen Loch versehen sind (Liebmann, Süß). Vorliegende Arbeit weist nach, daß alle anderen eigentlichen F_2 als Ganzes infinitesimal verbiegbare sind. Der Nachweis dieser Aussage gelingt hauptsächlich mit dem folgenden grundlegenden Schaafschen Satz (J. reine angew. Math. 1930): Jede Fläche, die sich singularitätenfrei mit einem konjugierten Netz ebener Kurven überdecken läßt (d. h. durch jeden Punkt der Fläche gehen genau zwei Kurven, von denen die eine der einen, die andere der anderen Kurvenschar angehört), ist stets infinitesimal verbiegbare. Verf. leitet daher zuerst aus einem Satz von Böklen (Literaturangabe dazu fehlt) her, daß sich jede eigentliche F_2 mit einem ebenen konjugierten System überdecken läßt. Die Ergebnisse der Arbeit, die mit synthetischen Methoden gewonnen werden, sind dann die folgenden: Infinitesimal verbiegbare ist: 1. jede geradlinige eigentliche F_2 (einschaliges Hyperboloid); 2. jedes zweischalige Hyperboloid; 3. jedes elliptische Paraboloid; 4. jedes hyperbolische Paraboloid. Am Schluß der Arbeit wird wieder aus einem Satz von Schaaf gefolgert, daß jedes Hyperboloid und jedes im Scheitel gelochte Paraboloid sogar stetig verbiegbare ist. Steck (München).

Jonas, Hans: Ein allgemeiner Satz über W -Kongruenzen mit Anwendungen auf Laplacesche Zyklen, Biegungsflächen des einschaligen Hyperboloids und schiefe Weingartensche Systeme. Math. Ann. 114, 237—274 (1937).

Verf. nennt die Kurvennetze (u, v) zweier punktweise aufeinander bezogenen Flächen schmiegungsverwandt (S -Netze), wenn in entsprechenden Punkten die u -Kurven der einen und die v -Kurven der anderen die gleiche Schmiegungebene besitzen. Die Schnittpunkte der u -Tangente der einen mit der v -Tangente der anderen Fläche beschreiben zwei weitere Flächen, die von den Tangenten berührt werden. Es handelt sich also um ein recht allgemeines System windschiefer Vierecke, deren Seiten paarweise die vier Ortsflächen der Eckpunkte berühren. Hier gilt folgender Satz: Die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte eines Paares von S -Netzen bilden eine W -Kongruenz. Umgekehrt lassen sich durch die Strahlen einer W -Kongruenz auf ∞^1 verschiedene Weisen S -Netze legen. — Verf. bringt zahlreiche Anwendungen dieses Satzes, von denen die wichtigste erwähnt sei: Die betrachteten Systeme windschiefer Vierecke enthalten als Sonderfall die Laplaceschen Folgen der Periode vier. Also folgt: Die Diagonalkongruenzen einer Laplaceschen Folge der Periode vier sind W -Kongruenzen. Haack (Berlin).

Schneidt, Max: Über die gegenseitige Abbildung der Brennflächen eines Strahlensystems. Mh. Math. Phys. 45, 237—250 (1937).

Verf. untersucht die Abbildung, die durch die Strahlen einer Kongruenz zwischen den Brennflächen vermittelt wird. Die Bedingungsgleichungen für eine konforme Abbildung werden aufgestellt und einige spezielle Anwendungen durchgeführt. Schließlich wird der Fall betrachtet, daß die von den Torsen erzeugten Netze auf beiden Brennflächen die gleichen Winkel einschließen. Haack (Berlin).

Knothe, Herbert: Isoperimetrische Ungleichungen in der Liniengeometrie. Deutsche Math. 2, 67—73 (1937).

Verf. betrachtet eindeutig sphärisch abbildbare Strahlensysteme im großen und zeigt zunächst, daß jede Eifläche (e) als Enveloppe von Orthogonalebene durch die Systemstrahlen aufgefaßt werden kann; dabei haben die Schnittpunkte \mathfrak{r} der Orthogonalebene mit den Strahlen vom Mittelpunkt des Strahles konstanten Abstand α . Im folgenden werden zahlreiche Formeln abgeleitet, von denen das Integral über das Produkt θ der Hauptdralle die wichtigste ist; es gilt

$$\int \theta d\omega = O - 4\pi\alpha^2 + \frac{1}{2} \int (e - \mathfrak{r})^2 d\omega.$$

Dabei ist O die Oberfläche von (e) .

Haack (Berlin).

Ruse, H. S.: On the geometry of Dirac's equations and their expression in tensor form. Proc. Roy. Soc. Edinburgh 57, 97—127 (1937).

Consider the projective X_3 at infinity in the local space at a point of the under-

lying space-time V_4 . A parameter equation for the fundamental quadric Q in X_3 is given by

$$X^h = g^h_{A\bar{B}} \lambda^A \bar{\lambda}^{\bar{B}}, \quad (A, B = 1, 2), \quad (1)$$

where the X^h are coordinates in R_4 and therefore homogeneous coordinates in X_3 . λ^A specifies a generator of this quadric and $\bar{\lambda}^{\bar{A}}$ specifies a generator of the other system. λ^A is a contravariant spin-vector. The Dirac equations are written in the following form

$$\left. \begin{aligned} \lambda_A = g^j_{A\bar{B}} (V_j \bar{\psi}^{\bar{B}} - i \varphi_j \bar{\psi}^{\bar{B}}) + i \kappa \chi_A = 0, \\ \mu_A = g^j_{A\bar{B}} (V_j \bar{\chi}^{\bar{B}} + i \varphi_j \bar{\chi}^{\bar{B}}) + i \kappa \psi_A = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

A solution ψ^A, χ^A of these equations defines according to (1) upon Q two real points ξ and η . The generators passing through these points form a skew quadrilateral on Q . The 4 vertices correspond to 4 null vectors, the fundamental null vectors. Now the author shows, that it is possible to express the Dirac equation in a form not explicitly involving spinors, but depending upon the fundamental null vectors. These expressions are

$$\Omega^h = g^h_{A\bar{B}} \psi^A \bar{\lambda}^{\bar{B}} = 0, \quad A^h = g^h_{A\bar{B}} \chi^A \bar{\mu}^{\bar{B}} = 0,$$

where λ^B and μ^B are defined by (2) (comp. E. T. Whittaker, this Zbl. 16, 79). There is a second possibility. The equations

$$\Theta^h = g^h_{A\bar{B}} (\psi^A \bar{\lambda}^{\bar{B}} + \psi^A \bar{\mu}^{\bar{B}}) = 0$$

are equivalent to (2) and can also be expressed in terms of the fundamental null vectors. Every physical quantity expressed in terms of ψ and χ can be expressed in terms of the fundamental null vectors. J. Haantjes (Delft).

Topologie:

Stone, M. H.: Applications of Boolean algebras to topology. Rec. math. Moscou, N. s. 1, 765—771 (1936).

The author first points out that by discarding the closure of the empty set and identifying points having the same closure, one gets from any space in which $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$, $\overline{A} \supseteq A$ and $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, a space in which also $\overline{O} = O$ and $\bar{x} = \bar{y}$ implies $x = y$. He then states that any "Boolean" ring R in which $a^2 = a$ identically, is the ring of characteristic functions mod two of an algebra of subsets of a class K [cf. his article in the Trans. Amer. Math. Soc. 40, 37—111 (1936); this. Zbl. 14, 340]. The points of K are the prime ideals a of R . Among the various such representations of R , one is "perfect" in the sense that every prime ideal appears as precisely one point. Now imagine each $a \in R$ as a set, consisting of those points a which omit a as ideals in R . Relative to the "neighborhoods" a so introduced, K is a totally disconnected, locally bicomact Hausdorff space (or "Boolean space"). Conversely, every Boolean space H is associated reciprocally with a Boolean ring, whose elements are the bicomact open and closed subsets of H . The author will develop these ideas in greater detail in a paper to appear shortly in the Trans. Amer. Math. Soc. *Birkhoff* (Cambridge).

Waraszkiewicz, Zenon: Sur l'affinité des continus. Wiadom. mat. 43, 1—56 (1937) [Polnisch].

Im § 1 wird die Menge \mathfrak{K} aller Teilkontinuen eines beliebigen Kompaktums K mit Abstandsfunktion $r(x, y)$, wo $x \in K$ und $y \in K$, zu einem metrischen Raume \mathfrak{M} gemacht, und zwar durch eine geeignete Wahl der Abstandsfunktion $\varrho(A, B)$, wo $A \in \mathfrak{M}$ und $B \in \mathfrak{M}$, welche u. a. folgendes sichern soll: 1. der aus lauter lokal zusammenhängenden Teilkontinuen von K bestehende Teilraum des (im allgemeinen nichtseparablen) Raumes \mathfrak{M} ist separabel, 2. jedes Teilkompaktum von \mathfrak{M} besteht aus stetigen Bildern eines im Fundamentalquader des Hilbertschen Raumes liegenden Kontinuums als deren gemeinsamen Urbildes. — Daneben wird aus \mathfrak{K} ein zweiter metrischer Raum \mathfrak{M}^* mit einer Abstandsfunktion ϱ^* erzeugt derart, daß u. a. bei jeder

stetigen Abbildung f irgendeines $A \subset K$ auf einen einfachen Bogen $B \subset K$ der Abstand $\varrho^*(A, B)$ einen die obere Schranke von $r(x, f(x))$, wo $x \in A$, nicht überschreitenden Wert hat (dabei wird K als ein Teilkompaktum des euklidischen 3-dimensionalen Raumes vorausgesetzt). — Im § 2 wird die Menge aller in K liegenden homöomorphen Bilder eines $A \subset K$ als dessen topologische Komponente $\mathfrak{I}(A)$ von \mathfrak{M} bzw. $\mathfrak{I}^*(A)$ von \mathfrak{M}^* erklärt und A, B miteinander schwach verwandt bzw. verwandt genannt, wenn abgeschlossene Hüllen (in bezug auf \mathfrak{M} bzw. auf \mathfrak{M}^*) der beiden topologischen Komponenten $\mathfrak{I}(A)$ und $\mathfrak{I}(B)$ bzw. $\mathfrak{I}^*(A)$ und $\mathfrak{I}^*(B)$ gleich sind. Es gibt 2* verschiedene V -Eigenschaften (Verwandtschaftseigenschaften) von Kontinuen, d. h. welche allen mit einem gegebenen Kontinuum verwandten Kontinuen zukommen. Die Dimensionszahl ist im allgemeinen nicht eine solche; doch ist für Kontinuen mit endlichen Bettischen Zahlen die Dimensionszahl 1 eine V -Eigenschaft (übrigens ist es auch stets die erste Bettische Zahl). — Im § 3 werden u. a. folgende notwendige und hinreichende Bedingungen aufgestellt, damit eine Kurve mit der geraden Strecke verwandt sei: 1. Azyklicität mit erblicher (d. h. sich auf Teilkontinua übertragender) Irreduzibilität verbunden, 2. stetige Abbildbarkeit auf einfachen Bogen mit beliebig klein gehaltenem (größtem) Abstand zwischen Punkt und Bildpunkt. Dabei erweist sich die Verwandtschaft mit der Strecke als eine erbliche, Einbettbarkeit in die euklidische Ebene implizierende Eigenschaft von Kurven. Auch alle mit der Strecke verwandten Kontinuen besitzen ein gemeinsames stetiges Urbild im Hilbertschen Fundamentalkuader. — Im § 4 wird der Begriff des Endpunktes einer Kurve verallgemeinert und ebene Kurven Q , die solche Punkte nicht enthalten, auf Verwandtschaft mit der Kreislinie sowie auf eigene topologische Struktur untersucht. Sind echte Teilkurven von Q lauter einfache Bögen bzw. nur mit der Strecke verwandt, so heißt Q ein regulärer Weg bzw. nur regulär. Die Verwandtschaft mit der Kreislinie hat bei regulären Kurven deren Homöomorphie zur Folge. Überhaupt ist jeder reguläre Weg entweder mit der Kreislinie homöomorph oder ein unzerlegbares Kontinuum mit genau 4 erreichbaren β -Mengen (Definitionen bei C. Kuratowski, Math. Ann. 98, 399, und S. Mazurkiewicz, Fundam. Math. 14, 107) und ebenso vielen Komplementärgebieten, welches überdies ein nichthomogenes (d. h. ein nicht für je zwei Punkte x, y auf sich selbst mit x auf y homöomorph abbildbares) sein müsse. Die Beweise des letzten Paragraphen sind kaum skizziert und bedürfen einer Vervollständigung. — Die Arbeit enthält stellenweise Druckfehler und Unklarheiten.

B. Knaster (Warszawa).

Rózańska, Julia: Über stetige Abbildungen eines Elementes. Fundam. Math. 28, 219—232 (1936).

Eine Menge S heißt nach Borsuk sphäroidal, wenn es zu jedem Punkt x von S eine beliebig kleine Umgebung U_x gibt derart, daß $S - U_x$ ein absoluter Retrakt ist. Ein stetiges, auf dem Rande R eineindeutiges Bild $f(E)$ eines n -dimensionalen Elementes E heißt eine Homotopiemembran mit dem Rande $f(R)$; sie heißt irreduzibel, wenn sie keine echte Teilmenge enthält, welche eine Homotopiemembran mit demselben Rande ist; sie heißt unverzweigt, wenn jeder nicht auf dem Rande liegende Punkt in beliebig kleinen Umgebungen liegt, deren Begrenzungen $(n - 1)$ -dimensional und sphäroidal sind. Eine Abbildung f heißt irreduzibel, wenn für keine abgeschlossene, echte Teilmenge U' des Urbildes U gilt $f(U') = f(U)$; sie heißt nulldimensional, wenn jeder Bildpunkt eine nulldimensionale Urbildmenge hat. Es wird bewiesen: Eine irreduzible, nulldimensionale, auf dem Rande eineindeutige Abbildung eines Elementes auf eine gleichdimensionale unverzweigte Homotopiemembran ist eine Homöomorphie. Für $n = 2$ gilt speziell: Jede unverzweigte Homotopiemembran der Dimension 2 ist einer Kreisscheibe homöomorph. Als Nebenresultat ergibt sich: Jede unverzweigte Homotopiemembran ist eine irreduzible Homotopiemembran. Es wird die Frage aufgeworfen: Enthält eine Homotopiemembran stets eine irreduzible Homotopiemembran mit demselben Rande?

Nöbeling (Erlangen).

Torrance, Charles C.: Tangent lines and planes in topological spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 41, 193—207 (1937).

In einem kompakten topologischen Raum R definiert Verf. als Geraden die Elemente jedes Systems G von Kontinuen mit folgenden Eigenschaften: 1. Sei (g_i) eine Folge von G -Mengen, γ der limes superior und g ein Element aus G , das mit γ einen mehrpunktigen Durchschnitt hat; dann enthält jede Folge von Punkten $B_n \subset g_n$ eine Teilfolge mit einem Häufungspunkt in g und jeder Punkt von g ist ein solcher Häufungspunkt; 2. je 2 Punkte P und Q von R liegen in einer (und nur einer) G -Menge; 3. sind U, V Umgebungen von P, Q , so enthalten sie Teilumgebungen U', V' derart, daß jede in der Summe aller zu U' und V' nichtfremden G -Mengen enthaltene G -Menge zu U' und V' nicht fremd ist. — Nach ähnlichen Gesichtspunkten werden Ebenen in R definiert. — Unter der Paratingente bzw. Biparatingente von R in einem Punkt P von R versteht man das System aller Geraden bzw. Ebenen, gegen welche sich Gerade bzw. Ebenen durch P benachbarte Punktepaare bzw. -tripel häufen. Verf. beweist in Verallgemeinerung eines Satzes und Beweises von Mirguet (dies. Zbl. 10, 219), daß die Paratingente und Biparatingente in jedem Punkt lokalen Zusammenhanges von R im Geraden- bzw. Ebenenraum Kontinua bilden. Vgl. hierzu Haupt-Nöbeling (dies. Zbl. 14, 275) und Pauc (dies. Zbl. 16, 137), wo die Sätze von Mirguet auf beliebige Dimensionen in abstrakter Fassung übertragen werden. Nöbeling.

Kagno, I. N.: The triangulation of surfaces and the Heawood color formula. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. 15, 179—186 (1936).

Flächen verschiedenen Zusammenhangs können durch denselben Graph in Zellen zerlegt werden. Im 1. Teil der vorliegenden Arbeit werden Sätze über solche Zerlegungen durch einen festen Graph bewiesen. Der 2. Teil handelt von der Realisierung der Spatia confinia in der Heawoodschen Maximalzahl. In Verallgemeinerung eines Ergebnisses von P. Franklin [J. Math. Physics 13, 363 (1934); dies. Zbl. 10, 275] wird der Satz aufgestellt, daß diese Maximalzahl niemals zugleich auf den orientierbaren und den nichtorientierbaren Flächen von derselben Bettischen Zahl erreicht werden kann. Hinsichtlich des Beweises sei auf die Arbeit selbst verwiesen. Er stützt sich wesentlich auf eine in Fußn. 6, S. 184, begründete Aussage; doch ist diese Begründung für den Ref. nicht überzeugend.

Friedrich Levi (Calcutta).

Tucker, A. W.: Cell spaces. Rec. math. Moscou, N. s. 1, 773—774 (1936).

This is a resume of results presented more fully elsewhere ["Cell spaces", Ann. of Math. 37, 92—100 (1936); this Zbl. 13, 283]. The idea is this: let a cell x of a combinatorial complex K be said to "include" a cell y if and only if the closure of x contains y . Then (1) the cells of K form a partially ordered set, (2) incidence, closure and boundary can be defined in terms of inclusion, (3) the boundary of any boundary is void. This suggests calling an abstract partially ordered set a "cell space", and developing in it topological ideas by analogy. The author does this, touching on mappings, dimensions, subdivisions, expansions.

Birkhoff (Cambridge).

Relativitätstheorie.

Husain, Zahur: On N. R. Sen's derivation of the Lorentz transformation. Indian J. Physics a, Proc. Indian Assoc. Sci. 11, 49—51 (1937).

Sen, N. R.: A reply to Husain's note. Indian J. Physics a, Proc. Indian Assoc. Sci. 11, 53—54 (1937).

These notes are principally concerned with the question of whether it is necessary to assume the constancy of the velocity of light as a separate hypothesis in a logical development of special relativity. The discussion is based on an earlier paper by N. R. Sen (this Zbl. 15, 87).

H. S. Ruse (Southampton).

Destouches, Jean-Louis: Généralisation de la transformation de Lorentz. J. Physique Radium, VII. s. 8, 145—152 (1937).

Krishnama Chari, C. T.: An epistemological approach to the special theory of relativity. *Mind* 46, 159—179 (1937).

Levi-Civita, Tullio: The relativistic problem of several bodies. *Amer. J. Math.* 59, 9—22 (1937).

By virtue of Newton's third law (equality of action and reaction) the internal reactions of a system do not influence the motion of the mass-centre in Newtonian mechanics. In the problem of n bodies, the motion of the mass-centre of any one of the bodies depends only on the gravitational field due to the other bodies. The purpose of the present paper is to show that this effacing-principle (neglect of self-contribution) does not hold in general relativity, although it may be applied in the case of two bodies by the introduction of modified masses (cf. this Zbl. 13, 233). In the treatment of the problem of n bodies by Droste [*Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. Sect. Sci.* 19, 447—455 (1917)] and de Sitter [*Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* 77, 155—184 (1917)] self-contributions were not adequately discussed. The author uses an energy tensor $T_{ik} = \varepsilon \lambda_i \lambda_k$, stress being neglected, but asserts that the inclusion of a term $-pg_{ik}$ (to allow for isotropic pressure) involves no modification in the conclusions. The methods are approximate: it is assumed that (1) velocities are small in comparison with light, (2) the squares of the ratios of the linear dimensions of the several bodies to their separations are negligible, (3) the motion of each body is roughly translational, (4) the attraction of each body on its mass-centre is small compared with the attraction at that point due to the other bodies. Full mathematical details are not given.

J. L. Synge (Toronto).

Narlikar, V. V., and Jaipat Singh: The geodesic postulate in general relativity. *Philos. Mag.*, VII. s. 23, 628—632 (1937).

Versuch, ein Kriterium anzudeuten, das zu entscheiden gestattet, ob eine Singularität der Feldgleichungen einem Massenpartikel entspricht. *Heckmann.*

Dirac, P. A. M.: The cosmological constants. *Nature* 139, 323 (1937).

Milne, E. A.: The constant of gravitation. *Nature* 139, 409 (1937).

Milne, E. A.: Kinematics, dynamics, and the scale of time. *Proc. Roy. Soc. London A* 158, 324—348 (1937).

Milne, E. A.: Kinematics, dynamics and the scale of time. II. *Proc. Roy. Soc. London A* 159, 171—191 (1937).

Milne, E. A.: Kinematics, dynamics and the scale of time. III. *Proc. Roy. Soc. London A* 159, 526—547 (1937).

In zwei vorhergehenden Arbeiten [*Proc. Roy. Soc. London A* 154, 22 u. *A* 156, 62 (1936); vgl. dies. Zbl. 13, 329 u. 14, 422] hat der Verf. eine Lorentzinvariante Dynamik und Gravitationstheorie aufgebaut im Anschluß an seine kinematische Kosmologie. In den vorliegenden Arbeiten werden die Konsequenzen gezogen aus der Einführung einer neuen Zeitvariablen $\tau = t_0 \log \frac{t}{t_0} + t_0$ (t_0 ist eine Normierungskonstante). Die Bewegungsgleichungen nehmen in der Variablen τ die Newtonsche Form an, beziehen sich dann aber auf einen hyperbolischen Raum, in welchem das Fundamentalsubstrat ruht. — Makroskopische „Uhren“ zeigen τ , atomare dagegen t an. Im weiteren wird die formale Seite der neuen Dynamik ausgebaut. Die Einzelheiten sind so zahlreich, daß sie sich einem kurzen Referat entziehen.

Heckmann (Göttingen).

Astrophysik.

Schwarzschild, M.: Über die Energieerzeugung in den Sternen. *Z. Astrophys.* 13, 126—131 (1937).

Aus Beobachtungen können für eine Reihe von Sternen (Komponenten von Doppelsystemen) Masse, Radius und Leuchtkraft und somit auch die Energieerzeugung pro Masseneinheit des Sterns abgeleitet werden. Mit Hilfe der Eddingtonschen Theorie

des Sterninnern können für diese Sterne wesentliche Züge der chemischen Zusammensetzung (Wasserstoffgehalt) sowie die Temperaturverteilung und Dichteverteilung im Sterninnern abgeleitet werden. Durch Vergleich dieser Daten kann man Schlüsse über die Abhängigkeit der Energieerzeugung im Sterninnern von den chemischen und physikalischen Parametern ziehen. Verf. behandelt dieses Problem zunächst ganz allgemein und sodann mit Hilfe eines Interpolationsansatzes für die Energieerzeugung (Produkt von Potenzen der Masse, des Wasserstoffgehalts, der Dichte und der Temperatur). Durch Vergleich mit den Beobachtungen werden die Exponenten des Interpolationsansatzes ermittelt. Verf. diskutiert die erhaltenen Resultate, insbesondere die Zunahme der Energieproduktion mit zunehmender Masse und abnehmendem Wasserstoffgehalt.

Bengt Strömgren (Chicago).

Weizsäcker, C. F. v.: Über Elementumwandlungen im Innern der Sterne. I. Physik. Z. 38, 176—191 (1937).

This is a qualitative review of the theory of atomic synthesis ("Aufbauhypothese") in stellar interiors; a quantitative treatment is promised later. It is postulated that a star consists initially of pure hydrogen, and that its energy generation is due, apart from an inappreciable fraction, to the building up of composite nuclei from the protons, the resulting loss of mass supplying the radiant energy. This is *a priori* plausible on account of the large abundance of hydrogen, and its importance in stellar constitution according to Strömgren's theory. Also the current estimate of the central temperature of a star of the main sequence gives a mean energy for a proton of about the magnitude required to produce artificial disintegration in the laboratory. We may therefore suppose that proton collisions at these temperatures produce light nuclei. The probability of them producing heavier nuclei falls off so rapidly that we have to look for some other process for their production, and laboratory results indicate the agency of neutrons. Hence we have to look for a source of neutrons in stars. The author first studies the formation of light nuclei. Since the probability of interaction of two nuclei of charges Z_1, Z_2 varies principally as $\exp(-Z_1^2 Z_2^2 / T)^{1/3}$, this is greatest, for given Z_2 , for the smallest possible Z_1 , i.e. $Z_1 = 1$, corresponding to a proton, deuteron, or triton. So as long as the number of these latter particles is sufficient, processes involving them will be the important ones. The empirical properties of the processes are described, and it is concluded that they will not result in the formation in a star of nuclei as heavy as oxygen. Before this stage is reached the composite nuclei take on the rôle of catalysts for transforming protons into α -particles. It is this transformation which is the main source of the star's energy. In particularising the possible reaction-chains a difficulty is encountered owing to the fact that no particle of mass 5 is known. This is discussed in detail, and also the various reactions, involving isotopes of hydrogen, which generate neutrons. The rate of energy generation by these reaction-chains increases exponentially with the temperature, and is proportional to the number of light nuclei per unit volume. It follows that in a star the energy generation must be very strongly concentrated towards the centre, and that only a small fraction of the whole mass can be involved in the process at any given time, but the individual particles involved are constantly being changed by convection. The author then studies the formation of heavy nuclei by neutron bombardment, showing that in a star there should be an adequate supply of neutrons, and discussing the factors which control the rate of formation of the nuclei under these conditions. Qualitative explanations are found for various features of the abundances of different species of nuclei, including the empirical laws of Goldschmidt and of Harkins, certain exceptions to these laws, and the existence of "isobaric pairs". The author finally considers the consequences of the theory in regard to stellar evolution. He points out that the state of a star should be entirely determined by its mass and hydrogen content, and also considers the problems of stability and Cepheid pulsation.

W. H. McCrea (Belfast).

Wildt, Rupert: Note on stellar ionization and electric fields. *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **97**, 225—231 (1937).

The paper repeats and completes a previous investigation by the same author [see R. Wildt, *Astrophys. J.* **83**, 202 (1936); this *Zbl.* **14**, 44] of the problem of ionization equilibrium under a temperature gradient. An equation is derived, giving the well-known Pannekoek-Rosseland field for the distribution of field strength in an isothermal star, plus certain correction terms. The importance of these corrections is discussed, and though an exhaustive investigation is not feasible without lengthy numerical computations, it is shown that they are in general probably rather small. *Steensholt.*

Chatterjee, N. K.: On the number of incompressible fluid spheres of given radius. *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **97**, 216—221 (1937).

Weiterführung einer Arbeit von N. R. Sen, On the equilibrium of an incompressible sphere [*Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **94**, 550 (1934); dies. *Zbl.* **9**, 236].

Heckmann (Göttingen).

Jankowski, K.: Zusatz zu dem Aufsatz: Hydrodynamische Grundlagen der Kosmogonie (AN 6266). *Astron. Nachr.* **262**, 79—80 (1937).

Vgl. dies. *Zbl.* **16**, 88.

Boneff, N.: Sur deux applications de la théorie cinétique des gaz. *Astron. Nachr.* **262**, 135—144 (1937).

Spekulationen, welche die Gastheorie auf „das“ System der außergalaktischen Nebel anwenden. *Heckmann* (Göttingen).

Fleming, J.: A method of deriving the general velocity ellipsoid from proper motions. *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **97**, 173—182 (1937).

The paper gives a generalisation of the Schwarzschild method for deriving solar apex and velocity ellipsoid from proper motions of the stars, to the case of general ellipsoidal distribution. The method followed is an extension of Eddington's method (*Stellar movements*, pp. 136—143). An essential simplification is attained by the introduction of a new angular parameter instead of the usual position-angle. *Ogrodnikoff.*

Clark, G. L.: The dynamics of a stellar system. *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **97**, 182—202 (1937).

The author makes a critical analysis of the well known papers of Jeans [*Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **76**, 79 (1915)] and of Eddington [*Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **76**, 37 (1915)] on the conditions under which an ellipsoidal velocity distribution may exist in a steady stellar system. It is shown that in the case treated by Eddington, viz. when the velocity distribution is of the form: $f(a^2L^2 + b^2M^2 + c^2N^2)$, where L, M, N are the velocity components along the principal directions of curvilinear triply orthogonal system of coordinates directed along the "velocity lines", Jeans's method gives the most general form of the velocity function. When, however, f has a more general form: $f(a^2L^2 + b^2M^2 + c^2N^2 + 2fMN + 2gNL + 2hLM^a)$, then Eddington's method is the more general one. In order to obtain following Jeans's method the general distribution it is necessary to take into account besides the first integrals of motion also the "invariant relations", i.e. certain identities satisfied by the coordinates and velocities of the stars which are independent of any arbitrary constants.

Kyrill Ogrodnikoff (Poulkovo).

Hubble, Edwin: Effects of red shifts on the distribution of nebulae. *Astrophys. J.* **84**, 517—554 (1936).

Basing on five groups of nebular counts down to 21,0 photographic magnitude an empirical relation is derived between Δm and the red shift $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$. Δm denotes the correction to the observed magnitude of the nebula due to the red shift, internebular light absorption or photometric error. It appears that observations lead to the relation: $\Delta m = 2,94 \Delta\lambda/\lambda$. Now, if the red shift is due to causes other than recession then the theoretical value of the numerical coefficient in the above formula should be

3,0 while in case of recession it would be equal to 4,0. The first value leads to a linear velocity-distance relation and a uniform space distribution among nebulae while the other implies strong departures from linearity in the velocity-distance relation. In order to account the latter from the point of view of relativistic cosmology it is necessary to assume a very small radius of the universe ($4,7 \times 10^8$ light years) which is just less than the estimated distance of the faintest nebulae recorded with the 100-inch reflector. On the other hand, the average density of matter comes out to be of the order of 10^{-26} g/cm³ which is to be compared with 10^{-28} — 10^{-30} deduced from observations. The author is inclined to believe that the observed red shift is not due to recession of nebulae. Then the observations agree with an Einstein static model of the universe or with a homogeneous model with negligible curvature and inappreciable expansion.

Kyrrill Ogrodnikoff (Poulkovo).

Quantentheorie.

Dugas, René: Mécanique quantique et dernier multiplicateur au sens de Jacobi. C. R. Acad. Sci., Paris **204**, 749—751 (1937).

Es wird die Kontinuitätsgleichung im Konfigurationsraum für die quantenmechanische Wahrscheinlichkeit mit dem Liouvilleschen Theorem der klassischen Mechanik verglichen.

O. Klein (Stockholm).

Datzeff, Assène: Sur le passage des corpuscules à travers des barrières de potentiel. C. R. Acad. Sci., Paris **204**, 558—560 (1937).

Es wird ein Lösungsverfahren der eindimensionalen Schrödingergleichung entwickelt, das auf eine Darstellung des Volterraschen Produktintegrals durch eine unendliche Reihe von bestimmten Integralen hinausläuft.

O. Klein (Stockholm).

Hönl, H.: Zur Theorie der geladenen Elementarteilchen. Ann. Physik, V. F. **28**, 721—760 (1937).

Die Diracgleichung des Elektrons

$$(\Omega + i\Phi - \gamma)\psi_e = 0,$$

$$\left(\Omega = \sum_1^4 \alpha_k \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad \Phi = \frac{e}{\hbar c} \sum_1^4 \alpha_k \varphi_k, \quad \varphi_k = \text{Viererpotential}, \quad \gamma = mc/\hbar \right)$$

und die analoge Gleichung für das Proton:

$$(\Omega - i\Phi - \Gamma)\psi_p = 0, \quad (\Gamma = Mc/\hbar)$$

werden zusammengefügt zu der Gleichung

$$(\Omega - i\lambda\Phi - \Gamma)(\Omega + i\lambda\Phi - \gamma)\psi = F\psi,$$

die einer gemeinsamen Theorie der geladenen Elementarteilchen zugrunde gelegt wird. (Die Existenz des Neutrons und die Fermischen β -Zerfallskräfte finden in dieser Theorie keinen Platz.) Das Kopplungsglied F und der Faktor λ werden aus den drei Bedingungen bestimmt: Invarianz der Form der Wellengleichung gegen Vertauschung der beiden Faktoren auf der linken Seite, Lorentzinvarianz und Eichinvarianz. Man kommt dann zu der Gleichung:

$$\{\Omega^2 - (\Gamma + \gamma)(\Omega + i\varrho\Phi) - \varrho^2\Phi^2 + \Gamma\gamma + 2i\varrho(\vec{\Phi} \text{ Grad}) - i\zeta\varrho S\}\psi = 0$$

mit $\vec{\Phi} = \frac{e}{\hbar c} (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ und $S = \frac{e}{\hbar c} \frac{\Gamma + \gamma}{\Gamma - \gamma} \sum_{k>l} \alpha_k \alpha_l F_{kl}.$

Die Bedingung $\zeta = \pm 1$ läßt sich dabei nicht ganz willkürfrei herleiten. Für ϱ hat man die beiden Werte $+1$ und -1 frei; sie sind gleichberechtigt (duale Darstellung). Im einen Fall spricht man von negativen Elektronen und stellt die Positronen mit Hilfe der Löchertheorie dar; im andern Falle umgekehrt. — Wegen $\Gamma \gg \gamma$ ergibt die Wellengleichung in erster Näherung (Glieder ohne Γ weggestrichen) wieder ge-

rade die Diracgleichung des Elektrons. Für die schweren Teilchen ergeben sich charakteristische Abweichungen, die an Hand von zwei Beispielen diskutiert werden: Im homogenen Magnetfeld wird das magnetische Moment des Protons $(2\zeta + 1) e\hbar/2Mc$, was für $\zeta = +1$ gut mit dem experimentellen Wert $\approx 3e\hbar/2Mc$ übereinstimmt; magnetisches und mechanisches Moment stehen parallel, wie es sein muß. Im Coulombfeld zeigen sich keine meßbaren Abweichungen für das Elektron von der Diracschen Theorie der Feinstruktur; bemerkenswert ist, daß sich das magnetische Moment des Protons hier nur als 1 Kernmagneton ergibt, so daß man im Rahmen dieser Theorie überhaupt nicht von dem magnetischen Moment als einer festen Eigenschaft der Elementarteilchen sprechen kann.

S. Flügge (Leipzig).

Markow, M.: Zur Diracschen Theorie des Elektrons. *Physik. Z. Sowjetunion* **10**, 773—808 (1936).

Die Gordonsche Aufspaltung des Stromes in Leitungsstrom und Polarisationsstrom für die Diracsche Theorie wird verallgemeinert auf die Lagrangesche Funktion, den Tetrodeschen Energie-Impuls-Tensor, den Drehimpulssatz und Schwerpunktsatz. Sie ist relativistisch invariant. Der Energie-Impuls-Tensor spaltet in einen symmetrischen Teil, der dem klassischen Elektron entspricht, und einen Spinanteil auf, der seine Unsymmetrie verursacht. Der Zusammenhang der Aufspaltung mit den Gleichungen zweiter Ordnung wird besprochen.

S. Flügge (Leipzig).

Breit, G.: Approximately relativistic equations for nuclear particles. *Physic. Rev.*, II. s. **51**, 248—262 (1937).

Die Gleichungen, die heute zur Beschreibung der Wechselwirkung der Teilchen im Kern benutzt werden, sind nicht relativistisch invariant. Vollständige relativistische Invarianz läßt sich ohne explizite Einführung des Strahlungs- (und eventuell Neutrino-) Feldes nicht erreichen. Verf. versucht nun durch formale Überlegungen die Gleichungen so zu ergänzen, daß sie invariant sind bis zu Größen von der Ordnung v^2/c^2 . Die resultierenden Gleichungen können als Verallgemeinerung der bekannten Breitschen Gleichung [*Physic. Rev.* **34**, 553 (1929)] aufgefaßt werden.

Casimir (Leiden).

Stephenson, A. F.: Correction due to motion of center of gravity in the Hartree approximation in nuclei. *Physic. Rev.*, II. s. **51**, 590 (1937).

Verf. weist darauf hin, daß bei der Beschreibung eines Atomkerns mit Hilfe von Produkten von Wellenfunktionen einzelner Teilchen der Gesamtimpuls G des Kerns keine Diagonalmatrix ist, und erörtert, wie der so eingeführte Fehler in den Werten der Bindungsenergie behoben werden kann. Er schlägt zu diesem Zwecke vor, zunächst einmal festzustellen, mit welcher Wahrscheinlichkeit die verschiedenen Werte von G für die zugrunde gelegte Wellenfunktion vorkommen, die zugehörige kinetische Energie der translatorischen Bewegung entsprechend dieser Wahrscheinlichkeit zu mitteln und den Mittelwert von der Gesamtenergie abzuziehen. Verf. betont ferner, daß diese Reduktion stattfinden muß, ehe man nach der Ritzschen Methode die willkürlich gelassenen Parameter in der Wellenfunktion bestimmt, und erläutert am Beispiel des He-Kerns, welchen Unterschied dies macht.

R. de L. Kronig.

Jordan, P.: Kernkräfte. *Naturwiss.* **25**, 273—279 (1937).

Proca, Al.: Particules libres. Photons et particules „charge pure“. *J. Physique Radium*, VII. s. **8**, 23—28 (1937).

In Anschluß an eine frühere Arbeit (*dies. Zbl.* **15**, 186) wird die Ansicht näher entwickelt, daß ein Photon aus zwei Teilchen mit entgegengesetzten Ladungen und verschwindenden Ruhmassen bestehen soll.

O. Klein (Stockholm).

Rumer, Georg: Proton-Neutron Umwandlung unter Einwirkung von Gamma-Strahlung. *Physik. Z. Sowjetunion* **11**, 48—54 (1937).

Mit Hilfe der Fermischen Theorie des β -Zerfalls wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, daß unter Absorption eines Lichtquants ein Proton bzw. Neutron in ein

Neutron bzw. Proton unter Aussendung eines Positrons bzw. Elektrons und eines Neutrinos umgewandelt wird. Der Effekt ergibt sich als unbeobachtbar klein.

R. de L. Kronig (Groningen).

Bethe, H. A., and G. Placzek: Resonance effects in nuclear processes. *Physic. Rev.*, II. s. 51, 450—484 (1937).

Nach der Bohrschen Theorie [Nature 137, 344 (1936); dies. Zbl. 13, 237] müssen fast alle Kernreaktionen aufgefaßt werden als Prozesse von der Form: „Einfallendes Teilchen + Kern A \rightarrow Kern C \rightarrow Kern B + Teilchen Q“, wobei auch das Lichtquant als Teilchen aufgefaßt wird. Für derartige Prozesse läßt sich mit Hilfe der gewöhnlichen quantenmechanischen Störungstheorie in zweiter Näherung eine allgemeine Formel herleiten (die eine gewisse Analogie zur Kramers-Heisenbergschen Dispersionsformel hat). Dabei wird angenommen, daß das einfallende Teilchen sich im Kern in einem abstoßenden Potentialfeld von der Größenordnung 10^7 eV befindet. Diese Annahme wird dadurch begründet, daß nur dann die nächste Näherung der Störungsrechnung klein wird. Die Streuung durch dieses Feld überlagert sich jetzt der in zweiter Näherung auftretenden „Streuung durch Einfangung“. Verff. wenden nun ihre Formel auf verschiedene Spezialfälle an. Besonders wird das Auftreten von Resonanz bei langsamen und schnellen Neutronen unter Heranziehung der experimentellen Tatsachen diskutiert.

Casimir (Leiden).

Inglis, D. R.: Perturbation theory of light nuclei: He^4 and Li^6 . *Physic. Rev.*, II. s. 51, 531—544 (1937).

Hund, F.: Symmetrieeigenschaften der Kräfte in Atomkernen und Folgen für deren Zustände, insbesondere der Kerne bis zu sechzehn Teilchen. *Z. Physik* 105, 202—228 (1937).

In Analogie mit den in der Elektronenhülle der Atome herrschenden Verhältnissen wird untersucht, wie sich die stationären Zustände der Atomkerne auf Grund der Symmetrieeigenschaften ihrer Wellenfunktionen mit Hilfe von Quantenzahlen klassifizieren lassen. Es wird vorausgesetzt, daß die Wellenfunktionen nicht nur gegenüber der Vertauschung der Koordinaten zweier Protonen oder zweier Neutronen, sondern allgemeiner, gegenüber der Vertauschung der Koordinaten zweier beliebiger Teilchen antisymmetrisch sind. Die freie Drehbarkeit der Atomkerne im Raume bringt die Möglichkeit der Klassifikation ihrer Terme durch eine Drehimpulsquantenzahl J mit sich, die Kleinheit der Wechselwirkung zwischen dem Spin der Bausteine und ihrer Bahnbewegung ergibt einen Multipllettcharakter dieser Terme, welcher wie bei der Elektronenhülle durch Quantenzahlen L und S des gesamten Bahndrehimpulses und Spins beschrieben werden kann. Die experimentell wahrscheinlich gemachte Unabhängigkeit der Kräfte von der Art der Teilchen, übrigens eine Voraussetzung für die eingangs gemachte Annahme über die Symmetrie der Wellenfunktionen, führt zu einer neuen Quantenzahl R . Es folgen ausführliche Tabellen, aus denen in den praktisch wichtigen Fällen ersichtlich ist, welche tiefliegenden Terme bei Kernen mit 1—16 Bausteinen überhaupt zu erwarten sind. Schließlich wird gezeigt, daß bei gewissen Annahmen über Orts- und Spinabhängigkeit der Wechselwirkungskräfte Gruppen von Termen energetisch zusammenfallen. Die Rechnungen machen es begreiflich, warum ein Schalenbau der Kerne so wenig in Erscheinung tritt.

R. de L. Kronig.

Möller, C.: Einige Bemerkungen zur Fermischen Theorie des Positronenzerfalls. *Physik. Z. Sowjetunion* 11, 9—17 (1937).

Nach der Fermischen Theorie des β -Zerfalls kann ein Kern, statt ein positives Elektron zu emittieren, ein Elektron aus der K -Schale absorbieren. Die Wahrscheinlichkeit dieses Prozesses wird mit dem Wechselwirkungsansatz von Fermi und dem von Uhlenbeck-Konopinski berechnet. Die Wahrscheinlichkeit ist größer nach dem letzteren Ansatz. Auf jeden Fall sollte bei schweren Kernen und geringer Umwandlungsenergie die Absorption des K -Elektrons weitaus häufiger sein. Ferner wird die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet, daß außer einem positiven oder negativen Elektron noch gleichzeitig ein Lichtquant emittiert wird.

R. Peierls (Cambridge).

Richardson, H. O. W.: Relations in β -ray transformations and the neutrino theory. *Nature* 139, 505—506 (1937).

Für Kerne, bei denen die obere Grenze E_0 des β -Spektrums bei hohen Energien liegt (zwischen 2 und 12 MV), gibt der Ansatz von Konopinski und Uhlenbeck, bei solchen mit kleinem E_0 (< 2 MV) der von Fermi den Zusammenhang zwischen E_0 und der Zerfallszeit am besten wieder. Es wird vorgeschlagen, als Ansatz eine Linearkombination der beiden Ansätze zu wählen; die Form des Spektrums wird dann gegeben durch

$$N(E) dE = F(E, E_0) \left\{ 1 + \left(\frac{E_0 - E}{K} \right)^2 \right\} dE,$$

wobei $F(E, E_0)$ die aus dem Fermischen Ansatz allein folgende Verteilungsfunktion ist. K soll etwa bei $1,4$ — $2,2 mc^2$ liegen, um die experimentellen Daten möglichst gut darzustellen.

S. Flüge (Leipzig).

Mercier, André: Sur la théorie de la radioactivité β . *C. R. Acad. Sci., Paris* 204, 1117—1119 (1937).

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein radioaktiver Kern ein Elektron aus der K -Schale absorbiert, statt ein Positron zu emittieren, wird für leichte Kerne unter Zugrundelegung verschiedener Wechselwirkungsgesetze berechnet. *R. Peierls*.

Johnson jr., M. H., and H. Primakoff: Relations between the second and higher order processes in the neutrino-electron field theory. *Physic. Rev., II. s.* 51, 612—619 (1937).

Untersuchungen zur Deutung der Kernkräfte als Resultat der dem β -Prozeß zugrunde liegenden Gesetzmäßigkeiten. Es wird statt des ursprünglichen Fermischen Ansatzes sogleich der allgemeinere nach Uhlenbeck-Konopinski — ohne Spezialisierung hinsichtlich der Ordnungen der auftretenden Ableitungen der Wellenfunktion — zugrunde gelegt. Für die Neutron-Proton-Kraft ergibt sich eine Beziehung zwischen der Tiefe des „Potentialtopfes“ und der Reichweite der Kräfte. Die Ausrechnung der — erst in höherer Näherung der Störungsrechnung sich ergebenden — Proton-Proton- bzw. Neutron-Neutron-Kraft führt zu dem Ergebnis, daß die empirisch anscheinend vorhandene Übereinstimmung der Kräfte zwischen gleichen und zwischen ungleichen Teilchen theoretisch nur dann zu erzielen ist, wenn die Reichweite der Kräfte kleiner angenommen wird, als empirisch möglich ist. Die Nichtübereinstimmung von Theorie und Erfahrung scheint also definitiv. Dieselbe empirisch sicher unzutreffende Bedingung, nämlich eine Reichweite von höchstens $0,4 \cdot 10^{-13}$ cm, erweist sich auch als Voraussetzung dafür, daß die Theorie Schauerprozesse in der von Heisenberg erläuterten Weise ergeben kann.

P. Jordan (Rostock).

Hoyle, F.: The generalized Fermi interaction. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 33, 277—292 (1937).

Untersuchungen über die Verallgemeinerungsmöglichkeiten des Uhlenbeck-Konopinskischen Wechselwirkungsansatzes in der Theorie der β -Strahlung. Beschränkt man sich mit den genannten Verfassern auf Ausdrücke, welche die erste Ableitung der Neutrino-Wellenfunktion enthalten, so kann man neben dem von ihnen studierten Falle noch viele andere Ausdrücke angeben, welche ebenfalls lorentzinvariant sind. Sie alle ergeben nur bei kleinen Energiewerten eine veränderte spektrale Intensitätsverteilung und können vom experimentellen Standpunkt als gleichberechtigt mit dem Uhlenbeck-Konopinskischen Ansatz betrachtet werden. — Die Einführung einer Ableitung der Elektron-Wellenfunktion ergibt dagegen unbrauchbare Resultate. — Zieht man aber eine zweite Ableitung der Neutrino-Wellenfunktion in Betracht, so erhält man unter den zahlreichen lorentzinvarianten Ausdrücken, die es dann gibt, auch mehrere solche, die wiederum die empirischen Verhältnisse ebensogut darstellen wie die Theorie von U.-K. — Die von Lyman in ausgedehnten Messungen festgestellte Unstimmigkeit der U.-K.-Theorie für hohe Energien (obere Grenze des Spektrums) scheint nach Verf. dafür zu sprechen, daß das Neutrino doch eine von Null verschiedene Ruhmasse hat, die ungefähr gleich der Hälfte der Elektronenmasse wäre. *P. Jordan*.

Araki, Gentaro: Theory of fine structure of helium. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 19, 128—155 (1937).

Es wird die Feinstruktur der He-Terme mit dem Breitischen Wechselwirkungsansatz berechnet, und zwar in allgemeiner Form. Die vorkommenden Integrale werden für die Konfigurationen $1s2p$, $1s3p$, $1s3d$, $1s4d$ berechnet; die Übereinstimmung mit der Erfahrung ist gut. In den Eigenfunktionen ist die Polarisationswirkung des äußeren Elektrons auf das innere berücksichtigt. *Bechert (Gießen).*

Way, Katharine: Photoelectric cross section of the deuteron. Physic. Rev., II. s. 51, 552—556 (1937).

Bogdanovich, B. W.: On the theory of fine structure in the X-ray absorption spectra of molecular gases. Physik. Z. Sowjetunion 11, 83—94 (1937).

Aufstellung einer allgemeinen Formel für die Feinstruktur in den Röntgenabsorptionsbanden linearer dreiatomiger Moleküle. Berücksichtigung des Einflusses der Kernschwingungen. *R. de L. Kronig (Groningen).*

Baber, W. G.: The contribution to the electrical resistance of metals from collisions between electrons. Proc. Roy. Soc. London A 158, 383—396 (1937).

Es wird gezeigt, daß die Zusammenstöße zwischen den Leitungselektronen untereinander bei tiefen Temperaturen zu einem Glied im Widerstand proportional zu T^2 führen. Eine Abschätzung seiner Größe ergibt, daß dies Glied für einwertige Metalle bis hinunter zu weniger als 1° absolut klein ist gegenüber dem normalen (zu T^5 proportionalen) Widerstand, daß es aber für Übergangsmetalle wie Pd, Pt, Ni bei Heliumtemperatur überwiegt, was mit der Erfahrung übereinstimmt. *Nordheim.*

Blackman, M.: On the vibrational spectrum of a threedimensional lattice. Proc. Roy. Soc. London A 159, 416—431 (1937).

Zur Berechnung der spezifischen Wärme der Schwingung in einem Kristallgitter nahm Debye die gleiche Verteilung der Frequenzen an wie in einem Kontinuum. Zur Aufklärung von Unterschieden zwischen der Debyeschen Abhängigkeit der spezifischen Wärme von der Temperatur und den gemessenen werden hier in Fortführung von Untersuchungen ein- und zweidimensionaler Gitter (dies. Zbl. 10, 430, 431) die Schwingungen eines dreidimensionalen rein kubischen Gitters aus gleichen Atomen untersucht. Es werden quasielastische Kräfte zwischen Nachbarn und dazu kleine Kräfte längs der Würfflächendiagonalen angenommen und weitgehend numerisch gerechnet. *F. Hund (Leipzig).*

Landau, L., und G. Rumer: Über Schallabsorption in festen Körpern. Physik. Z. Sowjetunion 11, 18—25 (1937).

Der Vorgang der Schallabsorption in festen Körpern wird als Folge von Zusammenstößen zwischen den Schallquanten und Debyeschen Wärmequanten aufgefaßt. Dies Verfahren ist dann berechtigt, wenn die freie Weglänge der letzteren groß ist verglichen mit der Wellenlänge der Schallwellen. Bei Zimmertemperatur liegt die Grenze bei einer Wellenlänge von 10^{-6} cm, also weit außerhalb der experimentellen Möglichkeiten für Schallwellen. Bei tiefen Temperaturen können die Verhältnisse günstiger ausfallen. — Als Endresultat der Rechnung ergibt sich für die Absorption pro Zeiteinheit der Ausdruck:

$$\frac{\pi}{80} \cdot \frac{(2Q + 6R)^2}{\varrho^3} \cdot \left(\frac{C_t}{C_l}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{C_t}{C_l}\right)^2\right] \cdot \frac{\hbar k \theta^7}{C_l^3 \hbar^4}$$

Die Koeffizienten Q und R charakterisieren die Abweichung des Elastikums vom Hookeschen Gesetz, C_t und C_l bedeuten die Geschwindigkeit der transversalen bzw. longitudinalen Wellen, ϱ = Dichte, $k = 2\pi/\text{Schallwellenlänge}$. Es zeigt sich, daß hier die Absorption proportional der ersten Potenz der Frequenz ist, nicht wie bei langen Wellen proportional der zweiten. Vorausgesetzt ist, daß die Temperatur unterhalb der Debyeschen Temperatur (θ) liegt, d. h. daß Dispersionseffekte keine wesentliche Rolle spielen. Bei höheren Temperaturen ist die Absorption proportional der Temperatur. *H. O. Kneser (Marburg).*